变分法与临界非线性

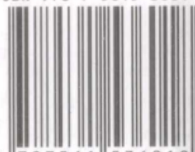
王文智 著



厦门大学出版社

XIAMEN UNIVERSITY PRESS

责任编辑 陈进才
封面设计 赵 磊
美术编辑 夏 林



O0183-1-1
ISBN 978-7-5615-3601-8
9 787561 536018 >
定价:40.00元

BIANFENFA

变分法与临界非线性

● 王文智 著



厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

变分法与临界非线性/王文智著. —厦门:厦门大学出版社,2010.7
ISBN 978-7-5615-3601-8

Ⅰ.①变… Ⅱ.①王… Ⅲ.①变分法-研究②非线性-泛函分析-研究
Ⅳ.①O176②O177.91

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 120695 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门市软件园二期望海路 39 号 邮编:361008)
http://www.xmupress.com
xmup @ public.xm.fj.cn
厦门集大印刷厂印刷
2010 年 7 月第 1 版 2010 年 7 月第 1 次印刷
开本:787×960 1/16 印张:23 字数:423 千字
定价:40.00 元

前　言

临界非线性问题，又称极限非线性问题，是数学物理中的一类现象，刻画这类现象的偏微分方程所对应的变分泛函不满足全局紧性条件，或者说处在紧性条件的边缘，这样，经典的变分法便不能用于解决这些问题，而几何、物理中许多著名问题正处于这种境况. 典型的例子要数历史上著名的 Yamabe 猜想（见第七章）：任意一个 $n \geq 3$ 维紧致 Riemann 流形 (M,g) 均共形等价于一个具恒常数量曲率的紧致 Riemann 流形. 这一问题等价于在 (M,g) 上求解如下椭圆方程：

$$-\Delta u + Su = \tilde{S}u^{(n+2)/(n-2)}, \quad u > 0 \qquad \text{(Yamabe)}$$

其中 Δ 是 Beltrami-Laplace 算子，$-\Delta + S$ 是共形 Laplace 算子，$\tilde{S}$ 是实常数.

Yamabe [212] (1960) 声称这一问题已解决，但 8 年后 Trüdinger [202] (1968) 发现 H. Yamabe 的证明有严重错误. 在 Yamabe 时代，大概人们认为变分问题中紧性是不成问题的，而这正是 Yamabe 的错误所在，(Yamabe) 方程所对应的变分问题不满足全局紧性条件. Trüdinger [202] 未能纠正其错.

Yamabe 问题的实质性进展是 1976 年 Aubin [3] 作出的，基本上证明 $n \geq 6$ 时 Yamabe 猜想成立. T. Aubin 的这一突破性进展在分析上具有里程碑意义. 为便于从分析上认识 Yamabe 问题，H. Brezis 与 L. Nirenberg 在文献 [52] (1983，当时 Yamabe 问题尚未完全解决) 中研究了 $n \geq 3$ 维有界区域 Ω 上的一个模型化问题（见第二章），今天人们称之为 Brezis-Nirenberg 模型，求一个函数 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$，使得

$$\begin{aligned} -\Delta u &= u^{N-1} + \lambda u, && \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u &> 0, && \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u &= 0, && \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{aligned} \qquad \text{(B.-N.)}$$

其中 λ 是一实常数，$N = 2n/(n-2)$.

问题 (B.-N.) 是变分的，它的解对应 $H_0^1(\Omega)$ 上如下泛函的非负临界点：

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int \left(|\nabla|^2 - \lambda u^2\right) - \frac{1}{N}\int |u|^N.$$

但由于指标 $p = N$ 是 Sobolev 嵌入 $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ 的临界指标（$1 < p < N$ 嵌入是紧致的，$p = N$ 嵌入仅为连续的），泛函 $\Phi(u)$ 不满足全局的 (P.S.) 条件，传统变分法便不能用来解决问题.

问题 (B.-N.) 的困难并不单单表现在分析方法上. 我们知道, 在次临界情形, $N < 2n/(n-2)$, 问题 (B.-N.) 对于 $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$ 是可解的; 而在临界情形, $N = 2n/(n-2)$, 却会出现 Pohozaev 障碍, 当 Ω 为星形区域时, 问题 (B.-N.) 对于所有 $\lambda \leq 0$ 无解. 这说明, 非线性问题 (B.-N.) 的临界与次临界情形有着本质的区别.

沿用 Aubin [3] 的方法（最佳 Sobolev 不等式与局部分析）, Brezis-Nirenberg [52] 证明: 当 $n \geq 4$ 时, 问题 (B.-N.) 对于 $\lambda \in (0, \lambda_1)$ 可解. 但当 $n = 3$ 时, 这种局部分析法不再适用, 而问题更依赖于区域的几何性质, 在 Ω 为球域的特殊情形, [52] 证明问题 (B.-N.) 对于 $\lambda \in (\lambda_1/4, \lambda_1)$ 可解（见本书定理 2.10 及定理 2.12）. 这或许揭示, 低维 Yamabe 问题的解决有赖流形的整体性质. Yamabe 问题的后来发展印证了这一点（见 Schoen [176], 亦见本书定理 7.21）.

Brezis-Nirenberg 模型可以说是认识 Yamabe 问题等临界非线性问题的“引路人”, 由此我们可以比较容易地认识其他临界非线性现象, 例如

(1) 古典 Plateau 问题（见第四章）及 H-方程下的 Plateau 问题（见第五章）;

(2) 极小曲面的浸入问题（见 Sacks-Uhlenbeck [173]）;

(3) 古典的等周问题;

(4) 某些最佳不等式极值函数的存在性问题, 包括诸如最佳 Sobolev 不等式（见本书 283 页）, 最佳 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式（见本书 274 页）, 最佳 Hardy-Sobolev 不等式（见本书 295 页）;

(5) 量子场论中著名的 Yang-Mills-Higgs 方程非极小解的存在性问题（见Taubes [198]）等等.

本书将若干临界非线性分析问题从文献中提取出来,（经简化、求新、求异）放在一起, 对照阅读, 以期对这些问题的认识获得一个“贯通”的感觉.

书的第一部分（第一章）是预备知识, 它与书末三个附录一起构成本书的基本背景知识.

第二部分讲 Brezis-Nirenberg 模型（第二章）及其推广（第三章）.

第三部分讨论平均曲率型问题, 主要是介绍 Brezis-Coron [48] 的工作, H-方程下的 Plateau 问题, 但为了了解历史背景, 在前一章介绍了 Douglas-Radó 关于古典 Plateau 问题的解, 两者均为历史名题.

第四部分（六、七、八章）讨论紧致 Riemann 流形上的数量曲率问题, 第六章是 Riemann 流形知识的罗列, 以免读者反复查阅相应的教科书. 第七章讨论 Yamabe 问题, 我们采用了 Lee-Parker [129] 的技术路线, 简化了 Aubin [3] 与 Schoen [176] 原来的证明. 第八章用来介绍预设共形数量曲率问题若干发展.

第五部分讨论凝聚紧性原理. 凝聚紧性原理是数学分析的重要方法，自 20 世纪 80 年代中期 P.L. Lions [140, 141] 的一系列开创性工作以来，得到了广泛深入的发展和应用. 一般来说，一个变分问题，如果在非紧致群作用下不变，则这样的变分问题不满足紧性条件. 在 $\mathbb{R}^n$ 中，关于平移不变的变分问题，用第一类凝聚紧性原理处理；关于伸缩不变的变分问题，属于临界非线性问题，用第二类凝聚紧性原理处理. 对于两种凝聚紧性原理，我们都给出各自的简约形式，其证明，也略有独到之处.

在作者的学习、研究及本书的写作过程中，得到许多帮助，在此表示衷心感谢.

致谢授业恩师：兰州大学陈文(山原)教授、余庆余教授、范先令教授、巴黎六大 Thierry Aubin 教授.

致谢师长：王永明教授、程盛兰教授、刿俊华教授、邸继征教授、钟承奎教授、张宝玉教授、李庆士教授、Michel Vaugon 教授.

致谢曾经和我在各个时期共同讨论数学问题及帮助过我的同学、同事及朋友.

致谢我的家人.

致谢下列机构：国家留学基金委，国家留学基金委回国留学人员基金会，山西省自然科学基金会，山西省外事处，太原理工大学科研处，深圳职业技术学院科研处.

限于水平，书中错误及不妥之处实属难免，恳请读者不吝赐教.

作者

2010 年 1 月于深圳

目 录

III 平均曲率型问题 103

I

预备知识

第一章　变分原理及基本BANACH空间

本章主要陈述本书所涉及到的有关抽象变分原理、基本 Banach 空间理论的一些基本事实. 所给定理基本不加证明，只指出其出处或参考文献，从中可以进一步了解细节. 间或遇到一些普通教科书不常见的定理、命题，而证明又不太长，也会给出证明. 作为预备，本章只有前三节是必要的，其余后两节内容可在阅读过程中回头查阅.

第一节　变分原理

本节的材料除第一目外，可在陈文(山原) [219]，张恭庆 [254] 或钟承奎等 [258] 中找到. 第一目陈述抽象 Banach 空间的一些基本概念，大多内容在一般泛函分析书上都有. 较简明的可见 Maddox [143]，概述可见钟承奎等 [258].

一、Banach 空间的若干概念

1. Banach 空间.

设 E 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，E 上的实值函数 $\|\cdot\|$ 称为 范数，如果它满足下列三个条件：

(α) (正定性) $\|x\| \geq 0, \forall\, x \in E$，且 $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$;

(β) (齐次性) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, x \in E$;

(γ) (三角形不等式) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall\, x, y \in E$.

线性空间 E 连同其范数 $\|\cdot\|$ 称为 线性赋范空间，记为 $(E, \|\,\|)$，简记为 E.

我们说赋范空间 E 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x_0 \in E$，记为 $x_n \to x_0$，如果 $\|x_n - x_0\| \to 0$.

称 $\{x_n\}$ 是 $(E, \|\ \|)$ 的一个 *Cauchy* 列，意指 $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n\| = 0$.

一个线性赋范空间称为 完备的，如果它的每个 Cauchy 列都收敛于该空间内一点. 完备的赋范线性空间就称为 Banach 空间.

2. Hilbert 空间.

设 H 为一线性空间，我们称 H 上的双线性泛函 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为内积，当且仅当它满足

(α) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$，$\forall\, x,\, y \in H$;

(β) $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle$，$\forall\, \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}$，$\forall\, x,\, y,\, z \in H$;

(γ) $\langle x, x\rangle \geq 0$，$\forall\, x \in H$，且 $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$.

线性空间 H 连同其内积称为 内积空间.

内积空间上有一个自然的范数，$\|x\| \triangleq \sqrt{\langle x, x\rangle}$，它满足 平行四边形律

$$\|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{1.1}$$

反之，满足平行四边形律的赋范空间必是内积空间.

完备的内积空间就称为 Hilbert 空间.

3. 赋范对偶. 线性赋范空间 E 上的实函数 f 称为 线性泛函，如果

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y), \quad \forall\, \lambda,\, \mu \in \mathbb{R},\, \forall\, x,\, y \in E.$$

f 称为有界线性泛函，若存在常数 M，使得对所有 $x \in E$，$|f(x)| \leq M\|x\|$.

E 上全体有界线性泛函构成的集合 E^*，按照通常的代数运算，构成线性空间，按照范数

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| = 1,\, x \in E\}$$

构成赋范线性空间，并且是 Banach 空间 (不论 E 是否完备). E^* 称作 E 的 赋范对偶或连续对偶 (空间)，简称对偶.

用 $\langle x, f\rangle$ 表示 $E \times E^*$ 上的如下双线性函数，称为 E 与 E^* 之间的匹配：

$$\langle x, f\rangle \triangleq f(x), \quad x \in E,\ f \in E^*.$$

$E^{**} \triangleq (E^*)^*$ 称为 E 的二次对偶.

作为 Hahn-Banach 定理的一个推论，赋范线性空间 E 与其二次对偶 E^{**} 的一个子空间等距同构. 确实，令 $j : E \to E^{**}$ 为

$$j(x)(f) = \langle x, f \rangle, \quad \forall\, f \in E^*, \forall\, x \in E,$$

则 $\|j(x)\|_{E^{**}} = \|x\|_E$. 故映射 $j : E \to E^{**}$ 是等距嵌入. 通常将 x 与 $j(x)$ 等同，故有 $E \subset E^{**}$.

若 Banach 空间 E 与其二次对偶 E^{**} 等距同构，即 $E = E^{**}$，则称 E 为 *自反 Banach 空间*.

根据 Pettis 定理 (见张恭庆等 [256])，自反 Banach 空间的闭子空间仍是自反 Banach 空间.

定理 1.1 (Riesz-Fréchet **定理**) 设 $f \in H^*$，其中 H^* 是 Hilbert 空间 H 的对偶空间，那么存在唯一的一个 $x_f \in H$，使得 $\|x_f\| = \|f\|$，且

$$f(x) = \langle x, x_f \rangle, \quad \forall\, x \in H.$$

Riesz-Fréchet 定理也称作 Riesz 表示定理. 它表明 Hilbert 空间 H 与其对偶空间 H^* 等距同构，因而是自反 Banach 空间.

比 Hilbert 空间更广泛的一类自反 Banach 空间，是所谓 *一致凸 Banach 空间*. 按定义，一个 Banach 空间 E 称为一致凸的，如果 $\forall\, \varepsilon \in (0, 2)$，$\exists\, \delta > 0$，使得只要 $x, y \in E$ 满足 $\|x\| = \|y\| = 1$ 及 $\|x - y\| \geq \varepsilon$，就有 $\|x + y\| \leq 2 - \delta$.

根据平行四边形律 (1.1)，Hilbert 空间是一致凸 Banach 空间.

定理 1.2 (Milman **定理**) 一致凸的 Banach 空间是自反 Banach 空间 (见 Yosida [214]).

4. 弱收敛.

定义 1.1 设 E 是赋范线性空间，E^* 是其对偶空间. 称 E 中的序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x_0 \in E$，记作 $x_n \xrightarrow{w} x_0$，如果

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, f \rangle = \langle x_0, f \rangle, \quad \forall\, f \in E^*.$$

将 $\{x_n\}$ 依 E 的范数收敛于 x_0 称为强收敛，记为 $x_n \xrightarrow{s} x_0$.

定理 1.3 设赋范空间 E 中的序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0，则弱极限唯一，$\{x_n\}$ 在 E 中依范数有界，且 $\|x_0\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$.

如果将范数看作能量，定理 1.3 暗示，弱收敛序列在向其弱极限过渡时，可能有能量损失. 如果能量不损失，我们会有何结论呢?

定理 1.4 (Radon-Riesz **定理**) 设 E 是一致凸 Banach 空间，序列 $\{u_n\} \subset E$ 弱收敛于 $u_0 \in E$，即 $u_n \xrightarrow{w} u_0$. 如果 $\|u_n\| \longrightarrow \|u_0\|$，则 $u_n \xrightarrow{s} u_0$ 于 E.

称一个集合 $A \subset E$ 是弱列紧的，如果 A 的任何序列都包含一个弱收敛子列. 若 A 的所有弱极限点都属于 A，则说 A 弱列闭的.

定理 1.5 (Eberlein-Smulian **定理**) 自反 Banach 空间的闭单位球是弱列紧弱列闭的.

5. 嵌入. 设 H, E 是 Banach 空间，我们说 H (连续地) 嵌入 E，记为 $H \hookrightarrow E$，如果 $H \subset E$ 且包含映射 $j : H \to E$ 是连续的，即

$$\|x\|_E \leq C\|x\|_H, \quad \forall\, x \in H.$$

如果包含映射 j 还是紧的，即 j 将 H 中的有界集映射成 E 中的相对紧集，则称嵌入 $H \hookrightarrow E$ 为紧嵌入.

嵌入 $H \hookrightarrow E$ 为紧，当且仅当 ($x_n \xrightarrow{w} x_0$ 于 H) $\Longrightarrow$ ($x_n \xrightarrow{s} x_0$ 于 E).

6. 弱*收敛与弱*拓扑.

定义 1.2 设 E 是赋范线性空间，E^* 是其对偶空间. 称 E^* 中的序列 $\{f_n\}$ 弱*收敛于 $f_0 \in E^*$，记作 $f_n \xrightarrow{w^*} f_0$，若且惟若

$$\lim_{n\to\infty} \langle x, f_n\rangle = \langle x, f_0\rangle, \quad \forall\, x \in E.$$

设 E 是 Banach 空间，在 E 的对偶空间 E^* 上可引进所谓弱*拓扑. 在弱*拓扑下，原点 $0 \in E^*$ 的基本邻域基为

$$U(\varepsilon, x_1, x_2, \cdots, x_n) \triangleq \left\{\varphi \in E^* : |\langle x_i, \varphi\rangle| < \varepsilon,\ 1 \leq i \leq n\right\},$$

其中 $n \in \mathbb{N}$，$x_1, x_2, \cdots, x_n \in E$，$\varepsilon > 0$ 都是任意的.

由此可见，E^* 中的序列在弱*拓扑下的收敛与定义 1.2 所给弱*收敛的概念是一致的.

定理 1.6 (Alaoglu定理) 设 E 是 Banach 空间，E^* 是其对偶空间，则 E^* 中的闭单位球是弱*紧的.

Alaoglu 定理也称 Banach-Alaoglu 定理 (如果空间是更一般的局部凸拓扑空间就称作 Alaoglu-Bourbaki 定理)，它的证明主要依赖 Tychonov (吉洪诺夫) 定理，参见 Yosida [214] 或张恭庆郭懋正 [257].

注意，弱*紧 (成立有限覆盖定理) 隐含弱*列紧，但两者不等价.

二、非线性映射的微分

1. Fréchet 微分.

设 X, Y 是线性赋范空间，设 $U \subset X$ 是 X 的一个开集，$f : U \to Y$ 为一 (非线性) 映射. 现给出 f 可微的概念.

定义 1.3 映射 $f : U \to Y$ 称为在 $x_0 \in U$ 是 Fréchet 可微的或强可微的，简称可微，如果存在有界线性算子 $A \in L(X, Y)$，使得

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah\|_Y = o(\|h\|_X), \quad (\|h\|_X \to 0).$$

我们将算子 A 称作 f 在 x_0 处的 Fréchet 导数或 Fréchet 微分，记作 $f'(x_0)$ 或 $\mathrm{d}\, f(x_0)$.

对于 $\mathbb{R}^n$ 上的可微函数 f，它的 Fréchet 微分 $f'(x_0) = \nabla f(x_0)$.

2. 临界点　临界值.

设 E 是 Banach 空间，Φ 是 E 上的可微泛函. 我们称 $x_0 \in E$ 是 Φ 的临界点，如果

$$\Phi'(x_0) = 0.$$

泛函在临界点处所取的值，就称为临界值. 与临界点、临界值相对，我们有正则点与正则值的概念.

3. 二阶微分.

设 $f : U \to Y$ 是 Fréchet 可微的，则对每一个固定的 $x \in U$，导数 $f'(x) \in L(X, Y)$. 因此，当 x 变化时，导算子 f' 是从 U 到 $L(X, Y)$ 的非线性映射. 进而，如果 $f' : U \to L(X, Y)$ 也是 Fréchet 可微的，则 f' 的导数 $f''(x) \in L(X, L(X, Y)) \cong L(X, X; Y)$.

三、极值问题

变分原理中，最基本的问题就是极值问题和条件极值问题，用条件极值求泛函临界点的方法通常称作 Lagrange 乘数法.

1. 绝对极值.

定理 1.7 设 Φ 是 Banach 空间 E 上的可微泛函，则 Φ 在 $x_0 \in E$ 达到局部极小值的必要条件是 $\Phi'(x_0) = 0$.

我们说赋范空间 E 上的泛函 Φ 在 x_0 处 下半弱连续，指的是

$$\left(x_n \xrightarrow{w} x_0\right) \Longrightarrow \left(\Phi(x_0) \leq \liminf \Phi(x_n)\right).$$

如果 $-\Phi$ 在 x_0 处下半弱连续，则说 Φ 在 x_0 处 上半弱连续. 如果 Φ 在 x_0 处既下半弱连续又上半弱连续，则称 Φ 在 x_0 处 弱连续.

泛函 Φ 称作是 强制的，如果 $|x| \to \infty$ 时，$\Phi(x) \to +\infty$.

命题 1.8 设 E 是自反 Banach 空间，D 是 E 的凸闭子集. 泛函 Φ 在 D 上强制，下半弱连续，则存在 $x_0 \in D$，使得 $\Phi(x_0) = \inf_{x\in D} \Phi(x)$.

因此，判断泛函是否下半弱连续在极值问题中是十分重要的. 常用的方法是判定泛函的凸性. 我们回顾凸泛函的定义. 凸集 D 上的泛函 Φ 称为凸的，如果对于任意 $x, y \in D$ 及实数 $0 < \alpha < 1$，有

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

定理 1.9 Banach 空间凸闭集上的连续凸泛函是下半弱连续的.

证明 见钟承奎 [258]. 证明过程依赖于 Mazur 定理 (见关肇直 [229])，该定理说，若 x_0 是 Banach 空间中序列 x_n 的弱极限，则 x_0 可被该序列的有限凸组合在强拓扑意义下无限逼近. □

例 1.1 根据定理 1.9，Banach 空间的范数及半范数是下半弱连续的.

在许多极值问题中，我们需要讨论被积函数 $f(x,u,\nabla u)$ 所定义的泛函

$$\Phi(u) = \int_\Omega f(x,u,\nabla u)\,\mathrm{d}x, \tag{1.2}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域，$f(x,u,p)$ 是定义在 $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{kn}$ 上的连续函数. 泛函 Φ 在适当空间内的下半弱连续性与 Morrey 拟凸性密切相关 (见 Morrey [150]).

定义 1.4　设 $f(p)$ 是 $\mathbb{R}^{nk}$ 上的连续实函数，我们说 $f(p)$ 是拟凸的，如果对于任意常向量 $p_0 \in \mathbb{R}^{kn}$ 及任意区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 成立

$$\frac{1}{|D|}\int_D f(p_0 + \nabla\phi)\,\mathrm{d}x \geq f(p_0), \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^k).$$

当 $k=1$ 且 f 二阶连续可微时，Morrey 拟凸性等价于 $f(p)$ 关于 p 凸. 当 $k \geq 2$ 时，Morrey 拟凸性条件严格弱于凸性条件.

定理 1.10　设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域. 设 $f(x,u,p)$ 是定义在 $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{kn}$ 上的连续函数，满足

$$0 \leq f(x,u,p) \leq C|p|^s + C_1 \ (\ s > 1\ ),$$

则由 (1.2) 定义的泛函 $\Phi(u)$ 在 $W^{1,s}(\Omega)$ 中下半弱连续的充分必要条件是 $f(x,u,p)$ 关于 p 拟凸.

注记 1.1　定理 1.10 的证明见 Acerbi-Fusco [12]. f 的连续性条件可减弱为 f 是 Caratheodory 函数，即 f 关于 x 可测，关于 u, p 连续.

2. **条件极值**　Lagrange **乘数法**.

定理 1.11　设 Φ, Ψ 是 Banach 空间 E 上的可微泛函. 记 $M = \{x \in E \,|\, \Psi(x) = 0\}$. 假定 M 非空，并且对于任意 $x \in M$ 都有 $\Psi'(x) \neq 0$. 若 $\Phi|_M$ 在 $x_0 \in M$ 达到局部极小值，则存在实数 λ，称为 Lagrange 乘数，使得

$$\Phi'(x_0) = \lambda\Psi'(x_0).$$

多个约束条件产生多个 Lagrange 乘数. 例如在两个约束条件下，如果在约束集 $M = \{\Psi_1 = 0,\ \Psi_2 = 0\}$ 的每一点 x，$\Psi_1'(x)$ 与 $\Psi_2'(x)$ 均线性无关，则 Φ 在 M 上的极值点 x_0 处有 $\Phi'(x_0) = \lambda_1\Psi_1'(x_0) + \lambda_2\Psi_1'(x_0)$.

定理 1.11 及其多个约束条件下对应定理的证明见张恭庆 [254] 或钟承奎 [258]，更一般的约束见陈文(山原) [219].

四、山路引理

经典的变分原理揭示了临界值与水平集之间的关系. 设 Φ 是 E 上的泛函，我们称集合 $\Phi^a = \{x \in E \mid \Phi(x) \leq a\}$ 为 Φ 的一个 水平集.

在整个传统的变分理论中，这样或那样形式的紧性条件起着关键的作用. 最常用的是

定义 1.5　设 $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$，我们称 Φ 满足 Palais-Smale 条件，简称 (P.S.) 条件，如果对任意序列 $\{x_n\} \subset E$，

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(x_n)\text{ 有界}\\ \Phi'(x_n) \to 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \{x_n\}\text{ 有强收敛子列.}$$

(P.S.) 条件是泛函的整体特性，应用中往往不能被满足，常用下列局部的 $(\mathrm{P.S.})_c$ 条件代替.

定义 1.6　设 $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$，我们称 Φ 满足 $(\mathrm{P.S.})_c$ 条件，如果对任意序列 $\{x_n\} \subset E$，

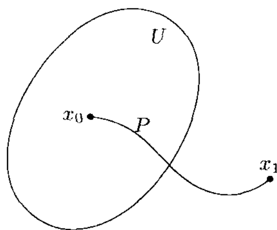
$$\left.\begin{array}{l}\Phi(x_n) \to c\\ \Phi'(x_n) \to 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \{x_n\}\text{ 有强收敛子列.}$$

在定义 1.5 及定义 1.6 中，满足花括号左边条件的序列，分别叫做 Φ 的 (P.S.) 序列及 $(\mathrm{P.S.})_c$ 序列.

定理 1.12 (形变引理)　设 $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ 在区间 $[a, b]$ 上满足 $(\mathrm{P.\text{-}S.})_c$ 条件，且 $\Phi^{-1}[a, b]$ 中不含有 Φ 的临界点，则 Φ^a 是 Φ^b 的一个强形变收缩核.

推论 1.13　在定理 1.12 的条件下，Φ^a 与 Φ^b 同伦.

由此可推知，若 Φ 在区间 $[a, b]$ 上满足 $(\mathrm{P.\text{-}S.})_c$ 条件，且 Φ^a 与 Φ^b 的伦型不同，则存在 Φ 的临界点 $x_0 \in \Phi^{-1}[a, b]$.



由形变引理极易推出下列山路引理 (mountain pass lemma, lemme du col). 见 Ambrosetti-Rabinowitz [22]. 山路引理说的是，由盆地中心出发，从四周山峰中最低处越过，必经过一个临界点（见图 1.1）.

定理 1.14 (山路引理) 设 E 为 Banach 空间，$\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ 满足 (P.S.) 条件. 设 U 是 x_0 的一个邻域. 假定 Φ 满足下列条件:

$$\Phi(x_0) < \alpha \triangleq \inf_{x \in \partial U} \Phi(x), \tag{mp1}$$

$$\exists\, x_1 \notin \bar{U} \text{ 使得 } \Phi(x_1) < \alpha. \tag{mp2}$$

记 $\mathscr{P}$ 为 E 中联结 x_0 与 x_1 的道路 P 的集合，则

$$c = \inf_{P \in \mathscr{P}} \max_{w \in P} \Phi(w) \tag{1.3}$$

是 Φ 的临界值，且 $c \geq \alpha$.

我们看到，不论是山路引理还是其所依据的形变引理，根本上依赖于 (P.S.) 条件. 在实际问题中，(P.S.) 条件常常遭到破坏，甚至在有限维也不例外.

例 右图展示了一个一元可微函数 $f(x)$ 不满足 (P.S.) 条件的例子. 序列 $\{x_n\}$ 满足条件: $f(x_n) \to c$，$f'(x_n) \to 0$. 但 $\{x_n\}$ 没有收敛子列，因为 $x_n \to \infty$. 水平集$f^{c-\varepsilon}$ 与 $f^{c+\varepsilon}$ 的伦型不同，前者连通，而后者却是不连通的. 按 Bahri [28] 的说法，$\{x_n\}$ 包含 f 的 无穷远临界点（见图 1.2）.

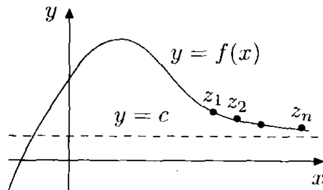


图 1.2: 无穷远临界点

本书讨论的大部分变分问题都不满足全局的 (P.S.) 条件. 因而，分清对哪些 c 值 $(\text{P.S.})_c$ 条件成立，对哪些 c 值 $(\text{P.S.})_c$ 条件不成立，至关重要. 在具体问题中，在对所论泛函作出精细分析前，往往难于判断，实用上，一个不带有 $(\text{P.S.})_c$ 条件的山路引理是方便的.

定理 1.15 (山路引理) 假定除 (P.S.) 条件外，Φ 满足 定理 1.14 的所有条件，则由 (1.3) 所定义的 c 是泛函 Φ 的渐近临界值，即存在 E 的序列 $\{x_n\}$，使得 $\Phi(x_n) \to c$，$\Phi'(x_n) \to 0$.

不带 (P.S.) 条件的山路引理 (mountain pass lemma without P.S. condition) 首见于 Brezis-Nirenberg [52]，其证明可见钟承奎等 [258] 或 Brezis-Nirenberg [53].

第二节　HÖLDER 空间与 L^p 空间

一、Hölder 连续函数空间

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是区域，α 是 n 重 $k \geq 0$ 阶指标，即 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，且 $|\alpha| \triangleq \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k$. Ω 上函数 $u(x)$ 的 α 阶导数记为

$$\partial_\alpha u(x) \triangleq \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

$\bar{\Omega}$ 上全体 k 次连续可微函数按范数 $\| \ \|_{C^k(\bar{\Omega})}$ 构成的赋范空间记为 $C^k(\bar{\Omega})$，其中

$$\|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} = \sum\nolimits_{|\alpha| \leq k} \max_{\bar{\Omega}} |\partial_\alpha u|.$$

可以验证，$C^k(\bar{\Omega})$ 是 Banach 空间.

分析中常用介于 $C^k(\bar{\Omega})$ 与 $C^{k+1}(\bar{\Omega})$ 的所谓 Hölder 空间. 设 $0 < \alpha \leq 1$，记

$$H_\alpha(u) = \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha},$$

称为函数 u 的指数为 α 的 Hölder 模数. 记

$$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C^k(\bar{\Omega}) : \ H_\alpha(\partial_\beta u) < \infty, \ |\beta| = k \right\},$$

在上述集合上引入范数

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} + \max_{|\beta| = k} H_\alpha(\partial_\beta u),$$

则 $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ 成为 Banach 空间，称为 Hölder 空间.

显然，当 $0 \leq k \leq m$，$0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ 时，有连续嵌入 $C^{m,\beta}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. 根据 Ascoli-Arzela 定理 (紧集上一致有界且等度连续的函数族列紧)，当 Ω 有界时，这个嵌入还是紧的.

按照贯例，用 $C_c^\infty(\Omega) = C_0^\infty(\Omega) = \mathscr{D}(\Omega)$ 表示在区域 Ω 上具有紧支集的无穷次可微函数构成的空间. $C_c^k(\Omega)$ 与 $C_0^k(\Omega)$ 的意义相类似.

$C_0(\bar{\Omega})$ 表示在 $\bar{\Omega}$ 上连续，在边界 $\partial\Omega$ (含无穷远边界点如果 Ω 为无界区域) 上取 0 值的函数. 开区域 Ω 上的全体有界连续函数记为 $C_b(\Omega)$，它在 L^∞ 范数下是一 Banach 空间.

二、L^p 空间

1. L^p 空间. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n\ (n \geq 1)$是一开集，$p \geq 1$ 是一实数. 我们用 $L^p(\Omega)$ 表示所有p 次 Lebesgue 可积函数构成的空间，其范数定义为

$$\|u\|_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

若不致发生混淆，通常简记为 $\|u\|_p$.

$L^\infty(\Omega)$ 表示本性有界可测函数的全体，其上范数定义为函数的本性上确界，即

$$\|u\|_{\infty,\Omega} \triangleq \inf\{M : |u(x)| \leq M,\ a.e.\ x \in \Omega\}.$$

$L^p_{loc}(\Omega)$ 表示在开集 Ω 上 p 次局部可积函数构成的向量空间，$u \in L^p_{loc}(\Omega)$ 当且仅当对于任意紧子集 $\bar{E} \subset \Omega$ (即 $E \subset\subset \Omega$)，$u \in L^p(E)$.

容易验证，当 $1 \leq p \leq \infty$ 时，$L^p(\Omega)$ 是 Banach 空间.

2. Hölder 不等式　一致凸性　对偶空间.

1) 设 $1 \leq p < \infty$，记 $p' = p/(p-1) \leq \infty$ (p' 叫做 p 的 Hölder 共轭数)，则成立如下 Hölder 不等式

$$\|uv\|_{1,\Omega} \leq \|u\|_{p,\Omega}\,\|v\|_{p',\Omega},\ \forall\, u \in L^p,\ \forall\, v \in L^{p'}.$$

设 $1 \leq q < p$，对于 $r \in (q,p)$，记 $\theta = \frac{1/r-1/p}{1/q-1/p}$，依 Hölder 不等式，成立如下 L^p 内插不等式

$$\|u\|_r \leq \|u\|_p^{1-\theta}\,\|u\|_q^{\theta}, \quad \forall\, u \in L^p \cap L^q. \tag{1.4}$$

2) 设 $1 < p < \infty$，初等论证显示，$L^p(\Omega)$ 是一致凸的，因而依 Milman 定理，$L^p(\Omega)$ 是自反的. 但 $L^1(\Omega)$ 与 $L^\infty(\Omega)$ 都不是自反 的.

3) 当 $1 \leq p < \infty$ 时，$L^p(\Omega)$ 的赋范对偶空间与 $L^{p'}(\Omega)$ 同构，即 $(L^p(\Omega))^* \cong L^{p'}(\Omega)$，特别，$(L^1(\Omega))^* \cong L^\infty(\Omega)$.

$L^\infty(\Omega)$ 的对偶空间与 $L^1(\Omega)$ 不等距同构. $L^\infty(\Omega))^* \cong ba(\Omega)$. $ba(\Omega)$ 是 Ω 上关于 Lebesgue 测度绝对连续、全变差有穷的 有限可加集函数构成的空间. 见附录A第 321 页，也见严加安 [251] 或 Yosida [214].

3. **可分性　光滑逼近.**　设 $1 \le p < \infty$，则 $L^p(\Omega)$ 是可分的，而 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密.

$L^\infty(\Omega)$ 是不可分的，$C_0(\bar{\Omega})$ 是 $L^\infty(\Omega)$ 的真闭子空间，$C_c(\Omega)$ 和 $C_0^\infty(\Omega)$ 都不在 $L^\infty(\Omega)$ 中稠密 (见 Adams[13]).

三、Brezis-Lieb 引理

在变分法及数学分析的许多领域，我们往往需要了解一个 L^p 序列更细致的特性，Brezis-Lieb 引理在这方面为我们提供了一个极好的工具.

本目需要抽象积分理论，可参见附录 A，也可将一般测度按 Lebesgue 测度来理解.

1. Brezis-Lieb 引理.

设 $(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$ 是一测度空间，$\{f_m\}$ 是 Ω 上一 $\mathscr{R}$ 可测的函数列，并且 L^p $(0 < p < \infty)$ 模 (范数) $\|f_m\|_p$ 一致有界，$f_m \xrightarrow{\mu-\text{a.e.}} f$. 那么，关于 $\|f\|_p$ 我们有什么结论呢？一个最直接的结论由 Fatou 引理给出：

$$\|f\|_p \le \liminf_{m\to\infty} \|f_m\|_p.$$

从而 $f \in L^p(\Omega)$. Brezis-Lieb [51] 发现了一个精确的等量关系，即

$$\lim_{m\to\infty} \left\{\|f_m\|_p^p - \|f_m - f\|_p^p\right\} = \|f\|_p^p. \tag{1.5}$$

现在人们将 (1.5) 称作 Brezis-Lieb 引理 (尽管原文中叫定理). 应用中，我们往往用的是它的另一种表达形式，称为 Brezis-Lieb 分解：

$$\|f_m\|_p^p = \|f\|_p^p + \|f_m - f\|_p^p + o(1). \tag{1.6}$$

引理 1.16 (Brezis-Lieb 引理)　*设 $(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$ 是一测度空间，$0 < p < \infty$，序列 $\{f_m\} \subset L^p(\Omega, \mu)$ 满足，$f_m \xrightarrow{\mu-\text{a.e.}} f$，以及对于所有 m，$\|f_m\|_p \le C < \infty$，那么 (1.5) 左端极限存在并且成立等式 (1.5).*

证明　$\forall\, \varepsilon > 0$，取 $C_\varepsilon > 0$ 充分大，使得

$$\big|\, |a+b|^p - |a|^p \,\big| \le \varepsilon |a|^p + C_\varepsilon |b|^p, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

记 $\theta_m = f_m - f$，对所取 ε，令

$$\Phi_{\varepsilon,m}(x) = \left[\left|\, |f + \theta_m|^p - |f|^p - |\theta_m|^p \right| - \varepsilon |\theta_m|^p \right]^+,$$

其中 $[a]^+ = \max\{a, 0\}$. 我们有 $\Phi_{\varepsilon,m}(x) \xrightarrow{a.e.} 0$. 由 (1.7) 式,

$$\Big|\, |f+\theta_m|^p - |f|^p - |\theta_m|^p \Big| \le \Big|\, |f+\theta_m|^p - |\theta_m|^p \Big| + |f|^p$$
$$\le \varepsilon|\theta_m|^p + (1+C_\varepsilon)\,|f|^p.$$

从而

$$\Phi_{\varepsilon,m}(x) \le (1+C_\varepsilon)|f|^p \in L^1(\Omega,\mu),$$

根据控制收敛定理, 当 $m \to \infty$ 时,

$$\int \Phi_{\varepsilon,m}(x)\,\mathrm{d}\mu \to 0.$$

因有

$$\Big|\, |f+\theta_m|^p - |f|^p - |\theta_m|^p \Big| \le \Phi_{\varepsilon,m}(x) + \varepsilon|\theta_m|^p,$$

于是

$$I_m \triangleq \int \Big|\, |f+\theta_m|^p - |f|^p - |\theta_m|^p \Big|\,\mathrm{d}\mu \le \int \big[\, \Phi_{\varepsilon,m}(x) + \varepsilon|\theta_m|^p \,\big]\,\mathrm{d}\mu,$$

从而 $\limsup I_m \le (2C)\varepsilon$, 令 $\varepsilon \to 0$ 便得结论. □

注记 1.2 我们应用引理 1.16 的大多情形, 测度空间是 Lebesgue 测度空间或加权 Lebesgue 测度空间, 即 $\mathrm{d}\mu = \varphi(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $\mathrm{d}x$ 是 Lebesgue 测度, φ 是 Lebesgue 可积函数.

2. L^p 序列的收敛性.

由 Brezis-Lieb 引理立得如下推论.

推论 1.17 设 $p \ge 1$, $\{f_m\} \subset L^p(\Omega)$. 若 $f_m \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, $\|f_m\|_p \to \|f\|_p < \infty$, 则 $f_m \xrightarrow{s} f$ 于 $L^p(\Omega)$ 中.

注意推论 1.17 与 Radon-Riesz 定理的区别.

在应用 Brezis-Lieb 引理前, 常常用到下列命题 (见 Adams [13]).

命题 1.18 设 $f_m \xrightarrow{s} f$ 于 $L^p(\Omega)$ 中, 则存在 $\{f_m\}$ 的子列使得它几乎处处收敛于 f.

在有界区域上, 几乎处处收敛隐含测度收敛, 结合 Hölder 不等式可证

命题 1.19 设 Ω 是有界区域，$f_m \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 于 Ω 中，若存在 $s>1$ 使得 f_m 在 $L^s(\Omega)$ 中一致有界，则对所有 $p\in[1,s)$，$f_m \xrightarrow{s} f$ 于 $L^p(\Omega)$ 中.

注记 1.3 命题 1.19 对于一般的 $L^p(\Omega,\mathrm{d}\mu)$ 空间也是成立的.

第三节 SOBOLEV空间

Sobolev 空间的核心内容是 Sobolev 嵌入定理，其基本内容包含在 S.L. Sobolev 的工作 [186, 187] 中，后经多个作者不断完善，其中重要的有 Gagliardo [102]，Nirenbrg [156]，Morrey [149] 及 Aubin [2] 等. 全面介绍 Sobolev 空间理论的权威性著作是 Adams [13].

一、整数阶 Sobolev 空间

1. **弱导数**. 函数的弱导数也称分布导数，是一个全局性概念，它的出发点是分部积分，也就是散度定理. 现在回顾这一定理.

散度定理 Green 公式. 设 Ω 是具有 C^1 边界的 $n\geq 2$ 维有界区域，用 ν 表示边界 $\partial\Omega$ 的单位外法矢. 则对任意 $C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ 向量场 X，有下列

散度定理
$$\int_\Omega \mathrm{div}X\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}X\cdot\nu\,\mathrm{d}S.$$

对于任意 $C^2(\Omega)\bigcap C^1(\overline{\Omega})$ 函数 f,g 分别有下列 Green 第一、及第二公式

$$\int_\Omega h\Delta f\,\mathrm{d}x+\int_\Omega \nabla f\cdot\nabla h\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}h\frac{\partial f}{\partial\nu}\,\mathrm{d}S,$$
$$\int_\Omega\big(h\Delta f-f\Delta h\big)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\Big(h\frac{\partial f}{\partial\nu}-f\frac{\partial h}{\partial\nu}\Big)\,\mathrm{d}S.$$

其中 $\mathrm{d}x$ 及 $\mathrm{d}S$ 分别表示 Ω 及 $\partial\Omega$ 上的体积 (面积) 元素.

紧致 Riemann 流形上也有相应的散度定理与 Green 公式，见第6章 178 页. 详细可参见陈维桓与李兴校 [220] 或 Chaval [74].

可微的概念推广为弱可微后，散度定理对这样的函数是成立的 (以后会看到，对有界变差函数也是成立的).

弱导数. 设 φ 是区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 上的可积函数，α 是多重指标，如果存在局

部可积函数 $\psi \in L^1_{loc}(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega u\psi \mathrm{d}\,x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \varphi\partial_\alpha u \mathrm{d}x, \quad \forall\, u \in C_0^\infty(\Omega),$$

则称 ψ 为 φ 的 α 阶弱导数，记作 $\psi = \partial_\alpha\varphi$ 或 $\psi = D^\alpha\varphi$. 如果函数 φ 的各 $|\alpha| \le m$ 阶弱导数都存在，我们就说它 m 阶弱可微. 用 $W^m(\Omega)$ 表示所有 m 阶弱可微函数组成的线性空间.

当函数 $u \in C^1(\bar\Omega)$ 时，u 必然弱可微，它的弱导数就是通常的偏导数.

一个函数是（一阶）弱可微的，当且仅当它等价于一个函数，这个函数在平行于坐标轴的线段上绝对连续，且其偏导数局部可积. 单变量的弱可微函数必定是绝对连续函数.

设 $u \in W^m(\Omega)$，$\xi \in \mathscr{D}(\Omega)$，则 $\xi u \in W^m(\Omega)$，并且成立如下 *Lebniz* 公式

$$\partial_\alpha(\xi u) = \sum\nolimits_{\beta\le\alpha} C_\alpha^\beta \partial_{\alpha-\beta}\xi\partial_\beta u, \tag{1.8}$$

其中 $|\alpha| = m$，$C_\alpha^\beta = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = C_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots C_{\alpha_n}^{\beta_n}$，而 $C_k^l = \frac{k!}{l!(k-l)!}$.

2. 空间 $W^{m,p}$.

设 $p \ge 1$ 是实数，$m \ge 1$ 是整数，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是区域. Sobolev 空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 定义为

$$W^{m,p}(\Omega) = \{\, u \in W^m(\Omega):\ D^m u \in L^p(\Omega)\,\}.$$

在 $W^{m,p}(\Omega)$ 上引进范数

$$\|u\|_{m,p} = \sum\nolimits_{|\alpha|\le m} \|\partial_\alpha u\|_p, \tag{1.9}$$

则 $W^{m,p}(\Omega)$ 在上述范数下构成 Banach 空间.

$W^{m,p}(\Omega)$ 可等价地定义为 $C^\infty(\Omega)$ 在范数 (1.9) 下的完备化（见 Adams [13]).

3. 空间 $W_0^{m,p}$.

$W_0^{m,p}(\Omega)$ 定义为 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的闭包. 当 Ω 是有界区域时，$W_0^{m,p}(\Omega)$ 有一个较简单的等价范数（见第 20 页 (1.14) 式).

通常 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 与 $W^{m,p}(\Omega)$ 并不等同. 当 $\Omega = \mathbb{R}^n$ 时，两者一致.

当 $p=2$ 时, $W^{m,p}(\Omega)$ 与 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 都是 Hilbert 空间, 也可分别记为 $H^m(\Omega)$ 及 $H_0^m(\Omega)$.

$W_0^{m,p}(\Omega)$ 及 $W^{m,p}(\Omega)$ 当 $1\le p<\infty$ 时是可分的, 当 $1<p<\infty$ 时是一致凸的, 故是自反的.

二、Sobolev 嵌入定理

1. Sobolev 不等式. 在 Sobolev 空间理论中, 最重要的是 Sobolev 不等式. 设 m, n 是正整数, $p\ge 1$ 是实数. 设 $mp<n$, 则成立 Sobolev 不等式

$$\|u\|_{\frac{np}{n-mp}}\le K_{n,m,p}\|D^m u\|_p,\quad \forall\, u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\tag{1.10}$$

其中 $K_{n,m,p}$ 是只依赖于 n, m, p 的常数.

不等式 (1.10) 最初由 Sobolev [186] (1938) 给出, 但不包括 $p=1$ 的情形, 其证明依赖于 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式 (见附录 B 中第 333 页, 也见第 9 章的 274 页).

后来在 1958 年 Gagliardo [102] 与 Nirenberg [156] 给出 (1.10) 一个非常初等的新证明, 其中也包括 $p=1$ 的情形. 基于分部积分及 Hölder 不等式, 他们证明 (参见 Aubin [5] 或 Gilbarg-Trudinger [106])

$$\|\varphi\|_{\frac{n}{n-1}}\le \prod_{i=1}^n\|\partial_i\varphi\|_1^{\frac1n},\quad \forall\,\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).\tag{1.11}$$

由于 $|\partial_i\varphi|\le|\nabla\varphi|$, (1.11) 就意味着 $p=1$, $m=1$ 时的 Sobolev 不等式. 接着, 令 $\varphi=|u|^{(n-1)q/n}$, 其中 $q=np/(n-p)$, 应用 Hölder 不等式便得

$$\left(\int|u|^q\right)^{\frac{n-1}{n}}\le C_{n,p}\left(\int|u|^q\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int|\nabla u|^p\right)^{\frac1p},$$

上式两边相约, 得 $m=1$ 时的 Sobolev 不等式, 递推, 得一般 Sobolev 不等式.

注意, 将一阶 Sobolev 不等式与 L^p 内插不等式 (1.4) 结合, 便得到著名的 Gagliardo-Nirenberg 不等式

$$\|u\|_q\le K(n,p,q,r)\|\nabla u\|_p^\theta\|u\|_r^{1-\theta},\quad \forall\, u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

其中 $1<p<n$, $r\ge1$, $0\le\theta\le1$, 且

$$\frac1q=\left(\frac1p-\frac1n\right)\theta+\frac{1-\theta}{r}.$$

Gagliardo-Nirenberg 不等式是早前 Nash 不等式的推广 (见 Nash [153]).

2. 连续嵌入.

要叙述 Sobolev 嵌入定理，需要 内部锥性质的概念.

设 $B \subset \mathbb{R}^n$ 是开球，$x_0 \in \mathbb{R}^n$ 是闭球 $\bar{B}$ 外一点，那么所有从 x_0 出发，穿过闭球 $\bar{B}$ 的射线所构成的点集是一个顶点在 x_0 的 无限锥，用球心在 x_0 的另一个闭球去截，便得一个顶点在 x_0 的 有限锥 P_{x_0}.

我们说区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 具有 内部锥性质，如果存在一个有限锥 P，使得 $\forall\, x \in \Omega$，$\exists$ 有限锥 $P_x \subset \Omega$，且 P_x 与 P 全等.

定理 1.20 (SOBOLEV 嵌入定理) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界或无界区域，且具有内部锥性质，则有下列连续嵌入:

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^q(\Omega) \;\; \forall\, q \in \left[p,\, \frac{np}{n-mp}\right] & 若\ mp < n, \\ L^q(\Omega) \;\; \forall\, q \in [p,\, \infty) & 若\ mp = n, \\ C_b(\Omega) & 若\ mp > n. \end{cases}$$

如果将 $W^{m,p}(\Omega)$ 换作 $W_0^{m,p}(\Omega)$，则上述嵌入对任意区域均成立.

注记 1.4 当 $mp < n$ 时，$W^{m,p}(\Omega)$ 可嵌入到更小的目标空间，Lorentz 空间 $L^{\frac{np}{n-mp},p}(\Omega)$，参见本章第四节的 39 页及其间所列文献.

注记 1.5 在极端情形，当 $mp = n$ 时，$W^{m,p}(\Omega)$ 并不能嵌入到 $L^\infty(\Omega)$. 在 $L^q\,(p \le q < \infty)$ 与 L^∞ 之间，存在 $W^{m,p}(\Omega)$ 的更佳的嵌入目标空间:

1) 如果 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域，如果 $mp = n$，则 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 可以嵌入到 Orlicz 空间 $L^\varphi(\Omega)$，其中 $\varphi(t) = \exp\left[t^{n/(n-m)}\right] - 1$，这正是 Trudinger 不等式所表达的内容，可见本书第 183 页定理 6.6 及其间所列文献.

2) 当 $mp = n$ 时，$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$，见定理 1.41.

3. Poincaré 不等式 $W_0^{m,p}$ 的等价范数.

(1) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有限宽区域，即 Ω 位于两个超平面之间，特别当 Ω 为有界区域时，则对于任意 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$，有

$$\|u\|_p \le C(n, p, \Omega)\, \|\nabla u\|_p\,. \tag{1.12}$$

(2) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界连通区域，边界 $\partial\Omega$ 满足局部 Lipschitz 条件，那么对于任意 $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$，有

$$\|u - \bar{u}\|_p \le C(n, p, \Omega)\, \|\nabla u\|_p\,, \tag{1.13}$$

其中 $\bar{u}$ 为 u 在 Ω 上的平均值，即 $\bar{u}=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,\mathrm{d}x$.

H. Poincaré 起初得到的是 $n=3$, $p=2$ 情形的不等式 (1.13). 不等式 (1.12) 的早期形式 ($n=2$, 3, $p=2$) 由 V. A. Steklov 及 K. Friedrichs 给出. 现在不等式 (1.12) 与 (1.13) 统称 Poincaré 不等式 (见 J. Naumann [155]). 它们的证明见 Adams [13]，也可参阅陈亚浙等 [223].

对有限宽区域 Ω，由 Poincaré 不等式 (1.12) (有界区域直接由 Sobolev 不等式与 Hölder 不等式) 可得 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 的一个等价范数

$$\|u\|_{m,p}=\sum\nolimits_{|\alpha|=m}\|\partial_\alpha u\|_p. \tag{1.14}$$

4. 紧嵌入.

当区域有界时，我们有下列紧性结果

定理 1.21 (Rellich-Kondrachov) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为有界区域，则有下列紧嵌入

$$W_0^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow\begin{cases}L^q(\Omega) & \text{若 } mp<n,\ q<\frac{np}{n-mp}, & (1.15a)\\ C^\lambda(\bar\Omega) & \text{若 } 0\le\lambda<m-\frac{n}{p}. & (1.15b)\end{cases}$$

注记 1.6 定理 1.21 的证明也可参见 Gilbarg-Trudinger [203]. 定理中 $C^\lambda(\bar\Omega)=C^{k,\alpha}(\bar\Omega)$，$k=[\lambda]$ 是 λ 的整数部分，$\alpha=\{\lambda\}$ 是 λ 的分数部分.

注记 1.7 如果 Ω 还具有锥性质，则嵌入 (1.15a) 对于 $W^{m,p}(\Omega)$ 也成立. 嵌入 $W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow C^\lambda(\bar\Omega)$ 的成立则需更强的几何条件，比如 Ω 具有强局部 Lipschitz 性质 (见 Adams [13]).

三、齐次 Sobolev 空间 $\mathcal{D}^{m,p}$

在无界区域，尤其是 $\mathbb{R}^n$ 上，往往须使用齐次 Sobolev 空间. 设 $n\ge 2$ 及 $m\ge 1$ 是整数，实数 $p\ge 1$ 满足 $mp<n$. 齐次 Sobolev 空间 $\mathcal{D}^{m,p}(\Omega)$ 是 $C_c^\infty(\Omega)$ 在范数 $\|D^m u\|_p$ 下的闭包. 根据 Sobolev 不等式，它的范数 $\|u\|_{\mathcal{D}^{m,p}}$ 有如下等价形式

$$\|D^m u\|_p,\quad \|u\|_{p_m}+\|D^m u\|_p,\quad \sum\nolimits_{0\le j\le m}\|D^{m-j}\|_{p_j},$$

其中 $p_j=\frac{np}{n-jp}$ 是临界嵌入 $W^{j,p}\hookrightarrow L^{p_j}$ 指标.

正如 $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)=W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ (见 Adams [13])，$\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ 可等价地描述为

$$\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n)=\{u\in L^{p_m}(\mathbb{R}^n):\ \|D^m u\|_p<\infty\}.$$

根据 Calderón-Zygmund 定理，当 $p > 1$ 时，对所有 $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 成立估计（参见苗长兴 [236] 习题 6.5-4 或陈亚浙-吴兰成 [223] 定理 3.6）

$$\|D^2u\|_p \le C_{n,p}\|\Delta u\|_p,$$

我们还可得到 $\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ 的另一种等价范数，

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{m,p}} = \|\nabla^m u\|_p \quad (p > 1).$$

此处

$$\nabla^m u = \begin{cases} \Delta^{\frac{m}{2}} u & m \text{ 为偶数}, \\ \nabla(\Delta^{\frac{m-1}{2}} u) & m \text{ 为奇数}. \end{cases} \tag{1.16}$$

显然当 Ω 为有界区域时，$\mathcal{D}^{m,p}(\Omega) = W_0^{m,p}(\Omega)$. 一般来说 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 是 $\mathcal{D}^{m,p}(\Omega)$ 的真子空间. 例如：令 $\psi = (1 + |x|^2)^{(2-n)/2}$，我们有 $\psi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$，但 $\psi \notin W_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.

$\mathcal{D}^{m,p}$ 分 $p > 1$ 和 $p = 1$ 有不同的性质. 当 $p > 1$ 时 $\mathcal{D}^{m,p}$ 是一致凸的，因而是自反 Banach 空间. $\mathcal{D}^{m,1}$ 不再自反.

四、分数阶 Sobolev 空间

1. 空间 $W^{s,p}(\Omega)$. 分数阶 Sobolev 空间有多种引入方法，不同方法产生或多或少的不同空间. 这里只介绍其中一种.

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 (有界或无界) 区域，$s \ge 0$, $1 < p < \infty$ 是实数. $W^{s,p}(\Omega)$ 是按下列范数构成的 Banach 空间

$$\|u\|_{s,p,\Omega}^p = \|u\|_{m,p,\Omega}^p + \sum_{|\alpha|=m} \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $m = [s]$ 是 s 的整数部分，$\sigma = \{s\}$ 是 s 的分数部分. 可以证明，当 s 为整数时，$W^{s,p}(\Omega)$ 就是整数阶 Sobolev 空间 (范数等价). 而且 $s_1 > s_2 \ge 0 \Longrightarrow W^{s_1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s_2,p}(\Omega)$.

$p > 1$ 时，$W^{s,p}(\Omega)$ 是一致凸 Banach 空间. $p = 2$ 时，$W^{s,p}(\Omega)$ 是 Hilbert 空间，记为 $H^s(\Omega)$.

我们也可将分数阶 Sobolev 空间的概念推广到一般的紧致光滑 Riemann 流形 (M, g) 上，其中导数 $D^m u$ 要用 m 阶协变导数 $\nabla^m u$ 替代，表达式 $\nabla^m u(x) -$

$\nabla^m u(y)$ 中 $\nabla^m u(y)$ 表示 x 点的张量，由 y 点处的张量 $\nabla^m u(y)$ 经由联结 x, y 的测地线平移而得.

特别当 $0 < s < 1$ 时，由于不涉及导数，$W^{s,p}(M)$ 与 $W^{s,p}(\Omega)$ 的定义几乎完全相同.

就本书的应用而言，我们只关心 $H^{1/2}(\partial\Omega)$ 及其性质，其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是具有充分光滑边界的有界区域. 按照定义，$H^{1/2}(\partial\Omega)$ 是 $\partial\Omega$ 上的函数构成的具有范数 $\|\cdot\|_{H^{1/2}}$ 的 Hilbert 空间，$\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ 当且仅当 (见 Adams [13])

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}}^2 = \int_{\partial\Omega} |\varphi(s)|^2 \mathrm{d}s + \iint_{\partial\Omega\times\partial\Omega} \frac{|\varphi(s)-\varphi(\tau)|^2}{|s-\tau|^2} \mathrm{d}s\mathrm{d}\tau < \infty.$$

2. **迹嵌入定理.**

我们知道，讨论 $L^p(\Omega)$ 中的函数在边界 $\partial\Omega$ 上的值是毫无意义的. 但对于 $H^1(\Omega)$ 中的函数 u，可通过迹映射，明确给出 $u|_{\partial\Omega}$ 的意义.

定理 1.22 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是有界光滑区域，则存在线性映射 $T: H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\partial\Omega)$，称为迹映射，使得

(α) (迹嵌入定理)

$$Tu = u|_{\partial\Omega}, \quad u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),$$

$$\|Tu\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \le K_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad u \in H^1(\Omega).$$

(β) (逆迹定理) 任给 $v \in H^{1/2}(\partial\Omega)$，存在 $u \in H^1(\Omega)$，使得 $v = Tu$，且

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \le K_2 \|v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

其中 K_1, K_2 是常数. 此外，$Tu = 0$ 当且仅当 $u \in H_0^1(\Omega)$.

五、有界变差函数

有界变差函数特别是多变量有界变差函数在偏微分方程、几何测度论等领域有许多重要的应用.

有界变差函数之所以重要，其中一个原因在于 $W^{m,1}$ 或 $\mathcal{D}^{m,1}$ 空间不自反，其中的有界列不具有弱列紧性，在这种情形，有界变差函数空间 BV^m 及 $\mathcal{BV}^m$ 是一个很好的代替，其中的有界列具有某种更弱的列紧性.

1. **有界变差函数的概念.**

定义 1.7　设 Ω 是 $n \geq 1$ 维或有界或无界区域，$f \in L^1_{loc}(\Omega)$，我们称

$$V_f(\Omega) \triangleq \sup\left\{\int_\Omega f \operatorname{div}\phi \, \mathrm{d}x : \ \phi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n), \ \|\phi\|_{L^\infty} \leq 1\right\}$$

为 f 在 Ω 上的全变差. 若 $V_f(\Omega)$ 有限，则称 f 是 Ω 上的有界变差函数. 若对任意 $U \subset\subset \Omega$ 都有 $V_f(U) < \infty$，则称 f 为 Ω 上的局部有界变差函数，记为 $f \in BV_{loc}(\Omega)$.

记 $BV(\Omega)$ 为 $L^1(\Omega)$ 中有界变差函数构成的集合，并赋予范数

$$\|f\|_{BV(\Omega)} = \|f\|_{1,\Omega} + V_f(\Omega),$$

则 $BV(\Omega)$ 是 Banach 空间.

根据定义 1.7，$f \in BV_{loc}(\Omega)$ 隐含 $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. 此外，如果 $f \in W^{1,1}(\Omega)$，根据散度定理

$$\int_\Omega f \operatorname{div}\phi \mathrm{d}x = -\int_\Omega \phi \cdot \nabla f \mathrm{d}x,$$

由此可见

$$V_f(\Omega) = \sup_{|\phi| \leq 1} \int_\Omega (-\phi) \cdot \nabla f \mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla f| \mathrm{d}x.$$

当 $n = 1$ 时，$V_f(\Omega)$ 给出通常一元有界变差函数的全变差.

下列定理表明，有界变差函数的分布导数是 $\mathbb{R}^n$ 值的符号 Radon 测度 (关于 Radon 测度见附录 A).

定理 1.23　设 $f \in BV_{loc}(\Omega)$，则存在一个 Ω 上的 Radon 测度 μ，及 Ω 上的 μ 可测向量值函数 $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^n$，$|\sigma| = 1$，满足

$$\int_\Omega f \operatorname{div}\phi \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \phi \cdot \sigma \mathrm{d}\mu, \quad \forall \phi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n). \tag{1.17}$$

此外，若 f 在 Ω 上具有有限变差，则测度 μ 还是有限的.

证明　在 $C^1_c(\Omega; \mathbb{R}^n)$ 上定义泛函 L 如下：

$$L(\phi) = -\int_\Omega f \operatorname{div}\phi \mathrm{d}x, \quad \forall \phi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n),$$

对于给定 Ω 的有界开子集 U，任取 $\phi \in C_c^1(U;\mathbb{R}^n)$，则

$$|L_f(\phi)| \leq V_f(U)\,\|\phi\|_\infty . \tag{1.18}$$

现将 L 的定义扩张到 $C_c(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 上. 对于 $\phi \in C_c(\Omega;\mathbb{R}^n)$，取有界开邻域 $U \supset \mathrm{sppt}(\phi)$，取函数列 $\phi_k \in C_c^1(U;\mathbb{R}^n)$，使得在 U 上一致地有 $\phi_k(x) \to \phi(x)$. 定义 $L(\phi) \triangleq \lim L(\phi_k)$. 根据 (1.18)，这一极限存在，因此 L 在 $C_c(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 上有明确的定义，且 $|L(\phi)| \leq V_f(U)\,\|\phi\|_\infty$. 应用 Riesz 表示定理 (定理 B.6)，存在 $\mathbb{R}^n$ 值的符号 Radon 测度 $\nu = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$，使得

$$L(\phi) = \int_\Omega \phi \cdot \mathrm{d}\nu, \quad \forall\, \phi \in C_c(\Omega;\mathbb{R}^n). \tag{1.19}$$

应用 Radon-Nikodym 定理，我们当然可以将 ν 写为 $\nu = \sigma\mu$，或者写为微分的形式 $\mathrm{d}\nu = \sigma\,\mathrm{d}\mu$，其中 μ 是 Ω 上的 Radon 测度，σ 是 n 维向量值 μ 可测函数，且 $|\sigma| = 1$. 故 (1.17) 成立.

若 f 在 Ω 上的变差有界，则由 (1.17) 立得，$\mu(\Omega) = V_f(\Omega)$ 有限. □

人们常常将定理 1.23 中的测度 μ 写为 $|Df|$，即 $|Df| \triangleq \mu$，

$$|Df| \triangleq \mu, \quad \text{而写} \quad [Df] \triangleq \sigma\mu,$$

根据 Radon-Nikodym 定理，$[Df]$ 可分解为

$$[Df] = [Df]_a + [Df]_s, \quad [Df]_a \ll \mathcal{L}^n,\ [Df]_s \perp \mathcal{L}^n.$$

其中 $\mathcal{L}^n$ 表示 n 维 Lebesgue 测度. $[Df]_a$ 及 $[Df]_s$ 分别称为 $[Df]$ 的绝对连续部分及奇异部分.

此外，若用 $\mathcal{H}^{n-1}$ 表示 $(n-1)$ 维 Hausdorff 测度 (Hausdorff 测度的概念见附录 A 第 322 页)，则 (见 Federer [98])

$$\big(\,\mathcal{H}^{n-1}(E) = 0\,\big) \Longrightarrow \big(\,|Df|(E) = 0\,\big). \tag{1.20}$$

2. **有界变差函数的各种性质.**

代数性质. 设 f, g 是 Ω 上两个有界变差函数，α, β 是两个实常数，ξ 是一 $C_c^1(\Omega)$ 函数. 不难验证，$\alpha f + \beta g$ 及 ξf 都是有界变差函数，且有

$$[D(\alpha f + \beta g)] = \alpha[Df] + \beta[Dg]$$

$$[D(\xi f)] = \xi[Df] + f[D\xi].$$

全变差的下半连续性．下列定理说，全变差 $V_f(\Omega) = |Df|(\Omega)$ 是下半连续的．即有

定理 1.24　设 f_k 是有界变差函数列，并且 $f_k \to f$ 于 $L^1_{loc}(\Omega)$ 中，则

$$|Df|(\Omega) \le \liminf_{k\to\infty} |Df_k|(\Omega).$$

证明　任给 $\phi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $|\phi| \le 1$，则在 $L^1(\Omega)$ 中 $f_k \operatorname{div}\phi \to f \operatorname{div}\phi$．故

$$\int_\Omega f \operatorname{div}\phi \,\mathrm{d}x = \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \operatorname{div}\phi \mathrm{d}x \le \liminf_{k\to\infty} |Df_k|(\Omega).$$

上式左端对 ϕ 取上确界便得结论．□

稠密性定理．接下来是用 C^∞ 逼近有界变差函数．下文所涉正则化算子的概念及性质见附录 C 第 326 页的内容，或 Adams [13]．

定理 1.25　设 $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ 是有界变差函数，则存在序列 $f_k \in C^\infty$，使得

$$f_k \to f \quad 在\ L^1_{loc}(\Omega)\ 中,$$
$$|Df_k|(\Omega) \le |Df|(\Omega), \quad |Df_k|(\Omega) \to |Df|(\Omega).$$

证明　令 $f_\varepsilon = J_\varepsilon * f$，其中 J_ε 是 Friedrichs 正则化算子．根据正则化算子的性质 $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$，且在 $L^1_{loc}(\Omega)$ 中，$f_\varepsilon \to f$．由定理 1.24 知

$$|Df|(\Omega) \le \liminf_{\varepsilon\to 0} |Df_\varepsilon|(\Omega), \tag{1.21}$$

(严格说是一列 $\varepsilon_k \to 0$)．设 $\phi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $|\phi| \le 1$，则

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_\varepsilon \operatorname{div}\phi \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega (J_\varepsilon * f) \operatorname{div}\phi \,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \left(\int_\Omega J_\varepsilon(x-y) \operatorname{div}\phi(x) \,\mathrm{d}x \right) f(y) dy \\ &= \int_\Omega f(y) \operatorname{div}(J_\varepsilon * \phi)(y) dy \le |Df|(\Omega).\end{aligned}$$

从而对于任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$|Df_\varepsilon|(\Omega) \le |Df|(\Omega). \tag{1.22}$$

这样，定理由不等式 (1.21) 及 (1.22) 获证．□

3. **紧嵌入** $BV(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$.

定理 1.26 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域，如果函数列 $\{f_k\}$ 按 $BV(\Omega)$ 范数有界，则存在 $f \in BV(\Omega)$ 及 f_k 的子列，仍记为 f_k，使得

$$f_k \xrightarrow{s} f \quad 在\ L^1(\Omega)\ 中.$$

证明 根据定理 1.25，我们可选函数列 $g_k \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$，使得

$$\|f_k - g_k\|_{1,\Omega} \le 1/k, \quad \|Dg_k\|_{1,\Omega} \le |Df_k|(\Omega).$$

$|Df_k|(\Omega)$ 的有界性，从而 $\|Dg_k\|_{1,\Omega}$ 的有界性及 Rellich-Kondrachov 嵌入定理，保证存在子列 $\{g_{k_i}\}$，使其在 $L^1(\Omega)$ 中收敛于某个 f，从而对应子列 $f_{k_i} \to f$ (在 L^1 中). 又，由定理 1.24，$|Df|(\Omega) \le \liminf |Df_k|(\Omega) < \infty$，故 $f \in BV(\Omega)$. □

注记 1.8 定理 1.26 实际说的是，对于有界区域 Ω，嵌入 $BV(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ 是紧的.

4. **空间** $BV^m(\mathbb{R}^n)$ **与** $\mathcal{BV}^m(\mathbb{R}^n)$.

定义 1.8 我们说 f 是区域 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 上的 m 阶有界变差函数，如果 $f \in W_{loc}^{m-1,1}(\Omega)$ 且 f 的所有 $(m-1)$ 阶偏导数具有有穷的全变差，即对任意 $(m-1)$ 阶指标 α，有 $V_{\partial_\alpha f}(\Omega) < \infty$.

根据定义，m 阶有界变差函数 f 的 m 阶分布导数为 $\big([D(D^\alpha)]\big)_{|\alpha|=m-1}$，记为 $[D^m f]$，它的每一个分量是一个符号 Radon 测度.

f 的所有 $(m-1)$ 阶偏导数的全变差之和称作 f 在 Ω 上的 m 阶全变差，记为 $|D^m f|(\Omega)$，即

$$|D^m f|(\Omega) = \sum_{|\alpha|=m-1} |D(D^\alpha f)|(\Omega). \tag{1.23}$$

$BV^m(\Omega)$ 表示 L^1 有界的 m 阶有界变差函数构成的赋范空间，范数为

$$\|f\|_{BV^m(\Omega)} = \|f\|_{1,\Omega} + |D^m f|(\Omega).$$

$\mathcal{BV}^m(\Omega)$ 表示 m 阶齐次有界变差函数空间，由所有 $L^q(\Omega)$ 中 m 阶有界变差函数构成，其中 $q=\frac{n}{n-m}$ $(m<n)$. $\mathcal{BV}^m(\Omega)$ 的范数是

$$\|f\|_{\mathcal{BV}^m(\Omega)}=\|f\|_{q,\Omega}+|D^m f|(\Omega).$$

当 Ω 为有界区域时，$\mathcal{BV}^m(\Omega)=BV^m(\Omega)$，否则两者不等同.

容易验证，$BV^m(\mathbb{R}^n)$ 与 $\mathcal{BV}^m(\mathbb{R}^n)$ 都是 Banach 空间，并且均不自反.

5. Sobolev 不等式.

定理 1.27 设 m, n 是正整数，满足 $1\le m<n$，则有

$$S\|f\|_q\le\|D^m f\|_{\mathbb{R}^n},\quad \forall f\in\mathcal{BV}^m(\mathbb{R}^n), \tag{1.24}$$

亦称 Sobolev 不等式，其中 $q=n/(n-m)$，常数 S 只依赖于 m, n.

证明 设 $f_\varepsilon=J_\varepsilon * f$，$J_\varepsilon$ 是标准的软化子，那么 $f_\varepsilon\in C^\infty\cap L^q$，故根据一般的 Sobolev 不等式，我们有

$$S\|f_\varepsilon\|_q\le\|D^m f_\varepsilon\|_{1,\mathbb{R}^n}=\sum_{|\alpha|=m-1}\|D(D^\alpha f_\varepsilon)\|_{1,\mathbb{R}^n}. \tag{1.25}$$

将 (1.22) 中的 f 换作 $D^\alpha f$，完全类似，我们有

$$\|D(D^\alpha f_\varepsilon)\|_{1,(\mathbb{R}^n)}\le|D(D^\alpha f)|(\mathbb{R}^n).$$

代入 (1.25)，注意全变差的表达式 (1.23)，我们有

$$S\|f_\varepsilon\|_q\le|D^m f|(\mathbb{R}^n).$$

令 $\varepsilon\downarrow 0$，由正则化算子的性质，我们有 $f_\varepsilon\xrightarrow{\text{a.e.}}f$，再据 Fatou 引理，便得定理所需求证之 Sobolev 不等式. □

6. 嵌入定理.

设 $1\le m<n$，记 $q=n/(n-m)$，根据有界变差函数的定义及 Sobolev 不等式 (1.24)，对于 $\Omega=\mathbb{R}^n$，我们有下列嵌入关系：

$$\begin{array}{ccccc}
W^{m,1}(\Omega) & \longrightarrow & BV^m(\Omega) & \longrightarrow & L^q(\Omega)\\
\downarrow & & \downarrow & & \|\\
\mathcal{D}^{m,1}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{BV}^m(\Omega) & \longrightarrow & L^q(\Omega)
\end{array}$$

由定理 1.26 及其注记 1.8 易知下列

定理 1.28 设 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 是具有内部锥性质的有界区域，则下列嵌入是紧的

$$BV^m(\Omega) \xrightarrow{\text{紧}} W^{j,1}(\Omega), \qquad 0 \le j < m,$$

$$BV^m(\Omega) \xrightarrow{\text{紧}} L^r(\Omega), \qquad 1 \le r < \tfrac{n}{n-m}\ (m < n).$$

7. **淡列紧性.**

定理 1.29 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是任意区域，若函数列 $\{f_k\} \subset \mathcal{BV}^m(\Omega)$ 满足 $\|f_k\|_{\mathcal{BV}^m} \le C$ 有界，则存在 $f \in \mathcal{BV}^m(\Omega)$ 及 f_k 的子列 (仍记为 f_k)，使得

$$f_k \longrightarrow f \qquad \text{在 } L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ 中}, \tag{1.26}$$

$$D^m f_k \xrightarrow{v} [D^m f] \quad \text{在 } \mathcal{M}(\Omega) \text{ 中}. \tag{1.27}$$

证明 仅就 $m = 1$ 的情形给出证明，余类似. 取一列有界区域 Ω_j 使得 $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$ 且 $\cup\Omega_j = \Omega$. 由于 $|Df_k|(\Omega_1)$ 及 $\|f_k\|_{\Omega_1}$ 有界，根据定理 1.26，存在 $\{f_k\}$ 的子列，记为 $\{f_{1,j}\}$，以及 Ω_1 上的有界变差函数 $f^{(1)}$ 使得在 $L^1(\Omega_1)$ 中，$f_{1,j} \xrightarrow{s} f^{(1)}$. 接着存在 Ω_2 上的有界变差函数 $f^{(2)}$ 及子列 $\{f_{2,j}\} \subset \{f_{1,j}\}$，使得 $f_{2,j} \xrightarrow{s} f^{(2)}$ 于 $L^1(\Omega_2)$，如此等等，我们有

$$f_{i,j} \xrightarrow{s} f^{(i)} \quad \text{在 } L^1(\Omega_i) \text{ 中}, \quad i = 1, 2, \cdots$$

利用 Helly 选择原理，子列 $f_{j,j}$ 在每个 Ω_i 上收敛于 $f(x) = \lim f^{(i)}(x)$，即 (1.26) 成立. 根据变差半范数的下半连续性 (定理 1.24)，立得

$$|Df|(\Omega) \le \liminf_{k\to\infty} |Df_k|(\Omega) < \infty.$$

最后往证 (1.27) 式. 任给 $\phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$，由于 (1.26)，$f_k \operatorname{div}\phi \to f \operatorname{div}\phi$ 在 $L^1(\Omega)$ 中成立. 故

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \operatorname{div}\phi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f \operatorname{div}\phi \, \mathrm{d}x.$$

根据定理 1.23，$[Df_k] \triangleq \mu_k$ 及 $Df \triangleq \mu$ 均是 Radon 测度，并且根据上式

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \phi \cdot \mathrm{d}\mu_k = \int_\Omega \phi \cdot \mathrm{d}\mu,$$

即 $\mu_k \xrightarrow{v} \mu$，此即所求证. □

第四节 对称重排 LORENTZ 空间

一、函数的对称重排

函数的对称重排有多种形式，关于一点对称的叫 Schwartz 对称重排，关于一个超平面对称的叫 Steiner 对称重排. 这里只介绍球面对称重排.

1. 分布函数及其积分.

设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的区域，f 为 Ω 上几乎处处取有限值的可测函数. 定义 f 的分布函数为

$$f_\sharp(\lambda) = \text{meas}\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\},$$

其中 meas 表示 Lebesgue 测度. 注意，$f_\sharp$ 实际上是 $|f|$ 的分布函数.

f (实际是 $|f|$) 的一维单减重排或单减重整 (rearrangement) $f^\sharp$ 定义为

$$f^\sharp(t) = \inf\{\lambda : f_\sharp(\lambda) \le t\}.$$

容易证明 f 的分布函数 $f_\sharp$ 及其一维单减重排 $f^\sharp$ 具有以下性质 (见苗长兴 [236])：

(1) $f_\sharp(t)$ 与 $f^\sharp(t)$ 单减，右连续；

(2) $|f(x)| \le |g(x)| \implies f_\sharp(\lambda) \le g_\sharp(\lambda)$；

(3) $|f(x)| \le |g(x)| + |h(x)| \implies f_\sharp(\lambda) \le g_\sharp(\lambda/2) + h_\sharp(\lambda/2)$；

(4) (Chebyshev 不等式) $f_\sharp(\lambda) \le \lambda^{-p} \int_{\{|f(x)|>\lambda\}} |f|^p \mathrm{d}x$；

(5) $f \in L^p \implies \|f\|_p = \|f^\sharp\|_p$；

(6) $(fg)^\sharp(\lambda + \mu) \le f^\sharp(\lambda) g^\sharp(\mu)$.

引理 1.30 设 Ω 是 $n \ge 1$ 维有界或无界区域，$1 \le p < \infty$，则

$$\int_\Omega |f|^p \mathrm{d}x = p \int_0^\infty \text{meas}\{\,|f| > \lambda\,\} \lambda^{p-1} \mathrm{d}\lambda = p \int_0^\infty f_\sharp(\lambda) \lambda^{p-1} \mathrm{d}\lambda.$$

证明 当 $p=1$ 时，引理 1.30 可看作是另一种形式的 Fubini 定理，此时应用通常 Fubini 定理得

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f|\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega\int_0^{|f(x)|}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}x = \int_\Omega\int_0^\infty \chi_{[0,\,|f(x)|]}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}x\\ &= \int_0^\infty\int_\Omega \chi_{[0,\,|f(x)|]}(\lambda)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\lambda = \int_0^\infty\int_{\{|f|>\lambda\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}\lambda\\ &= \int_0^\infty \mathrm{meas}\{|f|>\lambda\}\,\mathrm{d}\lambda = \int_0^\infty f_\sharp(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

当 $p>1$ 时用 $|f|^p$ 取代上式中的 $|f|$，并作变量替换 $\lambda=\mu^p$ 可得结论. □

2. **函数的单减球面对称重排.**

设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是可测集，用 E^* 表示中心在原点，并且与 E 具有相同体积(测度)的开球，即 $|E^*|=|E|$，如果测度 $|E|=\infty$，则规定 $E^*=\mathbb{R}^n$.

f (实际是 $|f|$) 的单减球面对称重排 f^* 定义为

$$f^*(x)=f^\sharp(w_n|x|^n),\quad \forall\, x\in\Omega^*, \tag{1.28}$$

其中 w_n 是 n 维单位球的体积.

由定义，f^* 显然是球面对称的或径向对称的，关于 $r=|x|$ 单调减，并且与 f 具有相同的分布函数，即 $\forall\,\lambda>0$，

$$\mathrm{meas}\{\,x\in\Omega^*:\ f^*(x)>\lambda\,\}=\mathrm{meas}\{\,x\in\Omega:\ |f(x)|>\lambda\,\}.$$

定理 1.31 (祖暅-Cavalieri 原理) 设 $f\in L^p(\Omega)$，其中 $1\le p\le\infty$，则 $f^*\in L^p(\Omega^*)$，且

$$\int_{\Omega^*}|f^*|^p\,\mathrm{d}x=\int_\Omega |f|^p\,\mathrm{d}x, \tag{Ca}$$

证明 由于函数 f^* 与 f 等分布，于是 $1\le p<\infty$ 时应用引理 1.30 便得结论. 当 $p=\infty$ 时，直接由本性上确界的定义可获得结论. □

定理 1.32 (Hardy-Littlewood 不等式) 设 $1 \le p \le \infty$，则

$$\int_{\Omega^*} |f^* - g^*|^p \, \mathrm{d}x \le \int_\Omega |f - g|^p \, \mathrm{d}x, \quad f, g \in L^p, \tag{HL}$$

$$\int_{\Omega^*} f^* g^* \, \mathrm{d}x \ge \int_\Omega fg \, \mathrm{d}x, \quad f \in L^p, g \in L^{p'}. \tag{Hd}$$

证明 1° 不等式 (HL) 的证明 不失一般性，可假设 f, g 非负. 当 $p=1$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f-g)^+ &= \int_{f \ge g} \int_{g(x)}^{f(x)} \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}x = \int_\Omega \int_0^\infty \chi_{[g(x), f(x)]}(\lambda) \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty \int_\Omega \chi_{[g(x), f(x)]}(\lambda) \mathrm{d}x \mathrm{d}\lambda \\ &= \int_0^\infty \mathrm{meas}\left[\{f > \lambda\} - \{g > \lambda\}\right] \mathrm{d}\lambda,\end{aligned}$$

所以

$$\int_\Omega |f - g| = \int_0^\infty \left\{ \begin{array}{r} \mathrm{meas}\left(\{f > \lambda\} - \{g > \lambda\}\right) \\ + \mathrm{meas}\left(\{g > \lambda\} - \{f > \lambda\}\right) \end{array} \right\} \mathrm{d}\lambda. \tag{1.29}$$

因为我们有下列简单关系

$$\begin{aligned} &\{f > c\}^* = \{f^* > c\}, \\ &B \subset A \implies |A - B| = |A^* - B^*|, \end{aligned} \tag{1.30}$$

(1.29) 及 (1.30) 便意味着 $p=1$ 情形的 (HL) 不等式.

当 $p > 1$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega [(f-g)^+]^p &= \int_{f \ge g} \int_{g(x)}^{f(x)} \int_{g(x)}^{\tau} p(p-1)(\tau - \sigma)^{p-2} \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\tau \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \iint_{\mathbb{R}^2} p(p-1)(\tau-\sigma)^{p-2} \chi_{[g,f]}(\tau) \chi_{[g,\sigma]}(\sigma) \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\tau \mathrm{d}x \\ &= \iint_{\sigma \le \tau} \int_\Omega p(p-1)(\tau-\sigma)^{p-2} \chi_{[g,f]}(\tau) \chi_{[g,\sigma]}(\sigma) \mathrm{d}x \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\tau \\ &= \iint_{\sigma \le \tau} p(p-1)(\tau-\sigma)^{p-2} \, \mathrm{meas}\left(\{f > \tau\} \setminus \{g > \sigma\}\right) \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

所以

$$\int_{\Omega}|f-g|^p=\iint\limits_{\sigma\leq\tau}p(p-1)(\tau-\sigma)^{p-2}\left\{\begin{aligned}&\text{meas}\left(\{f>\tau\}\setminus\{g>\sigma\}\right)\\&+\text{meas}\left(\{g>\tau\}\setminus\{f>\sigma\}\right)\end{aligned}\right\}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau.$$

由上式及 (1.30) 式便推出 (HL) 不等式.

2° 不等式 (Hd) 的证明

当 $1<p<\infty$ 时，由 $C_c(\Omega)$ 函数在 L^p 中的稠密性，映射 $f\mapsto f^*$ 在 L^p 中的连续性，只须就 $f, g\in C_c(\Omega)$ 的情形证明不等式 (Hd)，但此时 $f, g\in L^2$，故由不等式 (HL) 及 Cavalieri 原理推得 (Hd). 当 $p=1$ 时，用 C_c 函数逼近 f 而 g 不变，类似推理也成立. □

注记 1.9 西方学者称定理 1.32 为 Cavalieri 原理. 其实早在南北朝就有祖暅原理，大意是，若二立体所有等高处的横截面积相等，则二个立体的体积也必然相等.

注记 1.10 当 $p=2$ 时，(Hd) 正是经典的 Hardy-Littlewood 不等式 (见 [113])，此时它与 (HL) 等价. 不等式 (HL) 表明，从 $L^p(\Omega)$ 到 $L^p(\Omega^*)$ 的映射 $f\mapsto f^*$ 是非扩张映射. 当 $p=2$ 时，不等式 (Hd) 可几何地解释为，L^2 中两向量的夹角重排后不会变大.

关于函数的 Schwartz 对称重排，成立重要的 Pólya-Szegö 不等式. 为证之，需几何测度论中的等周不等式和余面积公式.

3. 等周不等式 余面积公式.

等周不等式 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集，E 在 $x\in\mathbb{R}^n$ 处的密度定义为

$$\text{dens}(E,x)=\lim_{\rho\to 0}\frac{\mathcal{L}^n(E\cap B_\rho(x))}{\mathcal{L}^n(B_\rho)},$$

其中 $\mathcal{L}^n$ 表示 n 维 Lebesgue 测度.

如果 $\text{dens}(E,x)=1$，则可认为本质上 x 属于 E，而若 $\text{dens}(E,x)=0$，则本质上 x 不属于 E，介于两者之间的点便构成 E 的本性边界 ∂^*E，即

$$\partial^*E=\{x\in\mathbb{R}^n:0<\text{dens}(E,x)<1\}.$$

称 $\partial^* E$ 的 $(n-1)$ 维 Hausdorff 测度 $\mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E)$ 为 E 的周界 (perimeter). 设 Ω 是开集, $E \subset \Omega$ 为可测集, 则 E 在 Ω 中的相对周界定义为 $P_\Omega(E) \triangleq \mathcal{H}^{n-1}(\Omega \cap \partial^* E)$, 这与 de Giorgi 的定义等价, 即 $P_\Omega(E)$ 等于 χ_E 在 Ω 内的全变差 $|D\chi_E|(\Omega)$.

这这些术语下, 等周不等式可表述为 (证明见 Chavel [75] 及其参考文献)

定理 1.33 (等周不等式) 设 E 是 $n \geq 2$ 维欧氏空间中的有界可测集, 且具有有限周界, 则

$$S_n \big[\mathcal{L}^n(E)\big]^{\frac{n-1}{n}} \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E),$$

等号成立当且仅当 E 为 n 维球体. 这里 $S_n = n\big[\frac{1}{n}\omega_{n-1}\big]^{1/n}$, 称为等周常数.

余面积公式 余面积公式 (coarea formula) 在分析中有着广泛的应用, 它的一个形式可以这样表述:

引理 1.34 (Federer 余面积公式) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) 中的开集, u 是 Ω 上的 Lipchitz 函数, f 是 Ω 上的非负可积函数, 则

$$\int_\Omega f(x)|\nabla u| \mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(\int_{E_t} f(x) \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(x) \right) \mathrm{d}t, \tag{1.31}$$

其中 $E_t = \{x \in \Omega : |u(x)| = t\}$, 而 $\mathcal{H}^{n-1}$ 则表示 $(n-1)$ 维 Hausdorff 测度.

公式 (1.31) 属于 Federer [97] (1959), 并从此称作余面积公式. (1.31) 隐含, 在所给条件下, 几乎对所有 $t \in \mathbb{R}$, 水平集 $\{u = t\}$ 具有有限面积.

证明 严格证明见 Federer [98], 在 u 光滑的情形也可见 Maz'ya [144].

这里我们作一些帮助领会余面积公式的说明. 设想 u 的性质足够好, 以至于所有水平集 $|u| = t$ 都是 $(n-1)$ 维 C^1 流形 (Sard 引理表明几乎所有水平集都是 C^1 流形), 其面积元 $\mathrm{d}s = \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}$. 记速降线 (一定垂直于水平集) 的弧长元为 $\mathrm{d}\nu$, 则 $|\nabla u| \mathrm{d}\nu = \mathrm{d}t$, 体积元可写为

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \mathrm{d}\nu,$$

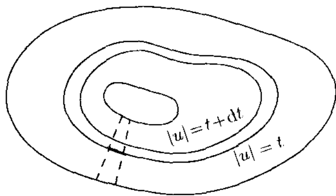


图 1.3: 水平线与速降线

于是

$$f|\nabla u| \mathrm{d}x = f \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \mathrm{d}t,$$

两边积分, 我们便在形式上获得了余面积公式. □

注记 1.11 Federer [98] 指出，(1.31) 对于函数 $u \in W^{1,p}$ $(p \geq 1)$ 的成立，须对 u 附加条件：

$$u(x) = \lim_{R \to 0} \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(x)} u(y) \mathrm{d} y$$

对任意右端极限存在的 $x \in \Omega$ 成立. 也就是说，u 是它所在 L^1 等价类中的精确代表 (precise representative). 注意，由 Lebesgue 微分定理，任意一个可积函数总可以适当改变其在某个 $\mathcal{L}^n$ 零测集上的定义，使其成为所在 L^1 等价类的精确代表. 应用中，我们总可如此假设.

应用中常常需要 BV 函数形式的余面积公式. 下列引理属于 Fleming-Rishel [100] (1960).

引理 1.35 (Fleming-Rishel 余面积公式) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，f 是 Ω 上的非负 Borel 函数，$u \in \mathcal{BV}(\Omega)$，则成立

$$\int_\Omega f \mathrm{d} |Du| = \int_0^\infty \left(\int_{\Omega \cap \partial^* \{|u| > t\}} f \mathrm{d} \mathcal{H}^{n-1} \right) \mathrm{d} t.$$

注记 1.12 引理中 Du 是 u 的分布导数，它是 $\mathbb{R}^n$ 值的符号 Radon 测度，当 $u \in W^{1,1}(\Omega)$ 时，$\mathrm{d}|Du| = |\nabla u| \mathrm{d} x$.

注记 1.13 由余面积公式可知，Ω 上有界变差函数 u 可以等价地描述为

$$|Du|(\Omega) = \int_0^\infty \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* \{|u| > t\}) \mathrm{d} t < \infty.$$

4. Pólya-Szegö 不等式.

Pólya-Szegö 不等式是对称重排理论的重要结论，一般采用余面积公式结合等周不等式的路线证明. 一个相对初等的证明，可用极化 (polarization) 的方法完成，但需要较多的铺垫 (见 [57], [175]).

定理 1.36 (Pólya-Szegö 不等式) 设 $1 \leq p < \infty$，Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域. 则对任意 $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\Omega)$，其 Schwarz 对称重排 $u^* \in \mathcal{D}^{1,p}(\Omega^*)$，并且成立

$$\int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^p \mathrm{d} x \leq \int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d} x. \tag{PS}$$

证明 当 $p=1$ 时，可以证明，u^* 弱可微. 在 Fleming-Rishel 余面积公式中取 $f=1$，我们有

$$\int_\Omega |\nabla u|\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty P_\Omega\big(\{|u|>t\}\big)\,\mathrm{d}t$$

因在边界 $\partial\Omega$ 上 $u=0$，我们有 $P_\Omega\big(\{|u|>t\}\big)=P_{\mathbb{R}^n}\big(\{|u|>t\}\big)$. 由等周不等式得

$$\mathcal{H}^{n-1}\big(\partial^*\{|u|>t\}\big)\geq \mathcal{H}^{n-1}\big(\partial\{u^*>t\}\big),$$

对函数 u^* 应用 Fleming-Rishel 余面积公式便得结论. 注意，如果 u 是在 $\partial\Omega$ 上取零值的 BV 函数，则以上推理过程表明 $|Du^*|(\Omega^*)\leq |Du|(\Omega)$.

当 $p>1$ 时，我们先对 $u\in\mathscr{D}(\Omega)$ 建立 Pólya-Szegö 不等式，容易证明，u^* 在 Ω 上弱可微. 令 $E_t=\{x\in\Omega : t\leq |u|\leq t+\mathrm{d}t\}$，在 Federer 余面积公式中取 $f=\chi_{E_t}|\nabla u|^{-1}$，再令 $\mathrm{d}t\to 0^+$，易知

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathcal{L}^n\left(\{|u|>t\}\right)}{\mathrm{d}t}=-\int_{\{|u|=\sigma\}}\frac{\mathrm{d}s}{|\nabla u|},$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}^n(\{u^*>t\})}{\mathrm{d}t}=-\int_{\{u^*=\sigma\}}\frac{\mathrm{d}s}{|\nabla u^*|}.$$

因为 $\mathcal{L}^n(\{|u|>t\})=\mathcal{L}^n(\{u^*>t\})$，由上式知

$$\int_{\{|u|=\sigma\}}\frac{\mathrm{d}s}{|\nabla u|}=\int_{\{u^*=\sigma\}}\frac{\mathrm{d}s}{|\nabla u^*|}. \tag{1.32}$$

根据 Sard 引理，上式中各积分对几乎所有 σ 有意义. 记 $\theta=(p-1)/p$，由 Hölder 不等式得（下文 $|A|$ 表示集合 A 的面积）

$$\big|\{u=\sigma\}\big|=\int_{\{u=\sigma\}}\mathrm{d}s\leq\left(\int_{\{u=\sigma\}}\frac{\mathrm{d}s}{|\nabla u|}\right)^\theta\left(\int_{\{u=\sigma\}}|\nabla u|^{p-1}\,\mathrm{d}s\right)^{1-\theta} \tag{1.33}$$

在球面 $\{u^*=\sigma\}$ 上，$|\nabla u^*|$ 是常数，故

$$\big|\{u^*=\sigma\}\big|=\left(\int_{\{u^*=\sigma\}}\frac{\mathrm{d}s}{|\nabla u^*|}\right)^\theta\left(\int_{\{u^*=\sigma\}}|\nabla u^*|^{p-1}\,\mathrm{d}s\right)^{1-\theta} \tag{1.34}$$

再次注意到 $\{u^*>t\}$ 是球体，根据等周不等式 (同体积的区域中球体的表面积最小)，我们有 $|\{u=\sigma\}|\geq|\{u^*=\sigma\}|$. 由 (1.32), (1.33) 及 (1.34) 便得到

$$\int_{u^*=\sigma}|\nabla u^*|^{p-1}\mathrm{d}s\leq\int_{u=\sigma}|\nabla u|^{p-1}\mathrm{d}s. \tag{1.35}$$

先后在 Ω 及 Ω^* 上应用余面积公式，分别取 f 为 $|\nabla u|^{p-1}$ 及 $|\nabla u^*|^{p-1}$，结合 (1.35) 便可推得

$$\int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^p \mathrm{d}x \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^p \mathrm{d}x. \tag{1.36}$$

现设 $u \in \mathcal{D}^{1,p}$，取一列 $u_k \in \mathscr{D}(\Omega)$，使得 $u_k \xrightarrow{s} u$ 在 $\mathcal{D}^{1,p}(\Omega)$ 中，根据 Hardy-Littlewood 不等式、(1.36) 及 $\mathcal{D}^{1,p}(\Omega^*)$ 的自反性，存在一子列 u_j 使得 $u_j^* \xrightarrow{w} u^*$ 在 $\mathcal{D}^{1,p}(\Omega^*)$ 中，于是

$$\begin{aligned}\|\nabla u^*\|_{p,\Omega^*} &\leq \underline{\lim}\, \|\nabla u_j^*\|_{p,\Omega^*} \\ &\leq \underline{\lim}\, \|\nabla u_j\|_{p,\Omega} = \|\nabla u\|_{p,\Omega},\end{aligned}$$

其中第一个不等式的依据是定理 1.3，第二个不等式的依据是光滑函数情形的 Pólya-Szegö 不等式. 定理 1.36 证毕. □

注记 1.14 我们知道，映射 $u \mapsto u^*$ 是从 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到自身的连续映射，但这一结论对 $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 当 $n \geq 2$ 时是不成立的 (见 Almgren-Lieb [19, 20]).

在许多变分问题中，我们特别关心 Pólya-Szegö 不等式成立等号的情形，我们有

定理 1.37 设 $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\Omega)$，$1 \leq p < \infty$，且 $0 \leq u \leq M$. 设 u 的球面单减对称重排 u^* 使得 Pólya-Szegö 不等式成立等号. 如果

$$\mathcal{L}^n\big(\{|\nabla u^*| = 0\} \cap \{0 < u^* < M\}\big) = 0,$$

那么 $\Omega = \Omega^*$ (至多相差一个平移) 且 $u = u^*$.

证明 见 Brothers-Ziemer [58]，定理对 BV 函数的推广见 Cianchi-Fusco [77]. □

作为定理 1.36 的一个应用，我们给出 Laplace 算子在 Dirichlet 边值条件下第一特征值的下界估计.

定理 1.38 (Faber-Krahn 定理) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中有界区域，记 $\lambda_1(\Omega)$ 为特征值问题

$$-\Delta f = \lambda f,\ x \in \Omega, \quad f = 0,\ x \in \partial\Omega$$

的第一特征值，则 $\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(B_R)$. 这里 B_R 是与 Ω 具等体积的球体.

证明 定理 (1.38) 是历史上叫 Rayleigh 猜想，后由 Faber 与 Krahn 证明. 我们知道，

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega |u|^2},$$

上式中的极小可被属于特征值 $\lambda_1(\Omega)$ 的特征函数 f 达到. 可设 $f \geq 0$. 记 f^* 为 f 在 B_R 内的球面单减对称重排，则 $f^*(R) = 0$. 根据定理 1.36 有

$$\lambda_1(\Omega) = \frac{\int_\Omega |\nabla f|^2}{\int_\Omega |f|^2} \geq \frac{\int_{B_R} |\nabla f^*|^2}{\int_{B_R} |f^*|^2} \geq \lambda_1(B_R).$$

这样便完成了定理的证明. □

5. **比较定理.**

借助 Schwarz 对称化，可建立二阶椭圆方程解的精细 (sharp) 估计. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，我们来考虑下列边值问题：

$$-\Delta u = f \quad 在\ \Omega\ 中, \quad u \in H_0^1(\Omega). \tag{1.37}$$

与此同时，我们考察 (1.37) 的对称化问题：

$$-\Delta v = f^* \quad 在\ \Omega^*\ 中, \quad v \in H_0^1(\Omega^*). \tag{1.38}$$

其中 Ω^* 是球心在原点且与 Ω 具等体积的球，f^* 为 f 的球面单减对称重排.

关于问题 (1.37) 及 (1.38) 的解，我们有下列经典结论 (见 Talenti [199]，Alvino-Lions-Trombetti [18] 及其参考文献)

命题 1.39 设 u, v 分别是问题 (1.37) 及 (1.38) 的解，则

$$u^*(x) \leq v(x) \quad \forall\, x \in \Omega^*,$$

即对称化问题的解优于原问题解的对称化，其中 u^* 是 u 的 Schwarz 对称重排.

二、Lorentz 空间

Lorentz 空间 $L^{p,q}(\Omega)$ 是通常 L^p 空间的扩展，属于调和分析的主要工作空间. 上世纪 80 年代以来，人们发现了 Sobolev 空间到 Lorentz 空间的嵌入定理，Lorentz 空间更加活跃在分析的其他领域.

1. Lorentz 空间 $L^{p,q}(\Omega)$.

现给出 Lorentz 空间 $L^{p,q}(\Omega)$ 的定义及其初等性质，详细请见苗 [236].

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是可测集，$1 \le p,\ q < \infty$，f 是 Ω 上的可测函数，定义拟范数

$$[f]_{p,q} \triangleq \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} f^\sharp(t) \right]^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/q}, \tag{1.39}$$

这里 $f_\sharp(t)$ 及 $f^\sharp(t)$ 表示 f 的分布函数及一维单减重排. 当 $q = \infty$ 时，则定义

$$[f]_{p,\infty} \triangleq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^\sharp(t) \equiv \sup_{\lambda>0} \lambda \left[f_\sharp(\lambda) \right]^{\frac{1}{p}}, \tag{1.40}$$

而且 $[f]_{p,\infty} = \lim\limits_{q\to\infty} [f]_{p,q}$. 最后，规定 $[f]_{\infty,\infty} = \lim\limits_{p\to\infty} [f]_{p,\infty} \equiv \|f\|_{L^\infty}$.

Lorentz 空间 $L^{p,q}(\Omega)$ 定义为 Ω 上拟范数 $[f]_{p,q}$ 有界的全体可测函数构成的线性空间. 显然 $L^{p,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$，且 $[f]_{p,p} = \|f\|_p$.

$L^{p,\infty}(\Omega)$，又称为弱 L^p 空间或 Marcinkiewicz 空间，记为 $L^p_w(\Omega)$，它的拟范数常简记为 $[f]_p$. $f \in L^p_w$ 的特征，更明白地可表为

$$\mathrm{meas}\{|f| > \lambda\} \le A^p/\lambda^p,$$

而 $[f]_p = \inf A$.

可以证明，在拟范数 $[\cdot]_{p,q}$ 下，$L^{p,q}(\Omega)$ 是完备的拓扑线性空间.

当 $1 \le q \le p$ 时，$[\cdot]_{p,q}$ 是范数.

当 $q > p$ 时，$[\cdot]_{p,q}$ 不满足三角形不等式，故只是拟范数而不是范数.

在 $1 < p < q \le \infty$ 这个范围内，$L^{p,q}(\Omega)$ 是可赋范的，并且可找到与 $[\cdot]_{p,q}$ 等价的范数 $\|\cdot\|_{p,q}$，例如，可取

$$\|f\|_{p,q} \triangleq \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right]^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/q},$$

其中 $f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^\sharp(s)\,\mathrm{d}s$，此时有最优估计

$$(p')^{\frac{1}{q}} [f]_{p,q} \le \|f\|_{p,q} \le p' [f]_{p,q}, \quad \forall f \in L^{p,q}.$$

在 $1 = p < q \le \infty$ 这个范围，不存在与拟范数 $[\cdot]_{p,q}$ 等价的范数.

根据定义，Lorentz 空间 $L^{p,q}(\Omega)$ 有如下嵌入关系：

1) 设 Ω 为任意可测集，$1 \le p < \infty$，$1 \le q_1 < q_2 \le \infty$，则

$$L^{p,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{p,q_1}(\Omega) \hookrightarrow L^{p,q_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p,\infty}(\Omega);$$

2) 设 $1 \le p_1 < p_2 < \infty$, $1 \le q_1, q_2 \le \infty$, $|\Omega| < \infty$，则

$$L^{p_2,q_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1,q_1}(\Omega).$$

2. Hölder 型不等式.

对于 Lorentz 空间，成立 Hölder 型不等式. 设 $f \in L^{p,q}(\Omega)$，$g \in L^{p',q'}(\Omega)$ ($1 < p < \infty$，$1 \le q \le \infty$，p' 是 p 的共轭指数)，则 $fg \in L^{1,1}(\Omega) = L^1(\Omega)$，且

$$\|fg\|_1 \le [f]_{p,q}\,[g]_{p',q'}. \tag{1.41}$$

确实，根据 Hardy-Littlewood 不等式 (定理 1.32)，我们有

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_{\Omega^*} f^*(x)g^*(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty f^\sharp(t)g^\sharp(t)\,\mathrm{d}t,$$

然后应用普通 Hölder 不等式，结合 Lorentz 拟范数的定义，便可得到 (1.41).

不等式 (1.41) 表明，$L^{p,q}(\Omega)^* \cong L^{p',q'}(\Omega)$.

3. 到 Lorentz 空间的 Sobolev 嵌入.

Sobolev 空间到 Lorentz 空间的嵌入问题可追溯到 Alvino [?] (1977) 及 Brezis-Waigner [56] (1980)，随后有许多文献研究这一问题 (见 Alvino-Trombetti-Lions [18], Peetre [166],Strichartz [184], Faris [96], Fournier [101])).

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是区域，实数 $1 \le p < n$. 我们知道，对于任意 $f \in \mathcal{D}^{1,p}(\Omega)$，成立 Sobolev 不等式

$$\|f\|_{\frac{np}{n-p}} \le C\|\nabla f\|_p,$$

上式左端可被较强的 Lorentz 模取代，即

$$[f]_{\frac{np}{n-p},p} \le C_{n,p}\|\nabla f\|_p, \tag{1.42}$$

$C_{n,p}$ 是只依赖于空间维数 n 和指数 p 的常数. 因为 $p < r = \frac{np}{n-p}$，上式说明，$\mathcal{D}^{1,p}$ 可以嵌入到比 L^r 较小的目标空间 $L^{r,p}$.

根据 Alvino-Trombetti-Lions [17]，(1.42) 的证明可以这样来完成，首先我们有 $[f]_{r,p} = [f^*]_{r,p}$，故根据 Pólya-Szegö 不等式，只须就 $\Omega = \Omega^*$，$u = u^*$ 证明 (1.42)，简单论证表明，此时它等价于 Hardy 不等式 (10.69) (见第 295 页).

其次，设 $1 \le p < n$，$1 \le q \le \infty$，引进 Lorentz-Sobolev 空间 $L^{p,q}W^1(\Omega)$，它是 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在拟范数 $[|\nabla f|]_{p,q}$ 下的完备化. 那么，我们有连续嵌入 $L^{p,q}W^1(\Omega) \hookrightarrow L^{np/(n-p),q}(\Omega)$. 准确地说，对于任意 $f \in L^{p,q}W^1(\Omega)$，有如下不等式

$$[f]_{\frac{np}{n-p},q} \le C_{n,p,q}[|\nabla f|]_{p,q}. \tag{1.43}$$

(1.43) 的证明要复杂很多，可见 Alvino-Trombetti-Lions [17]，Faris [96] 及 Fournier [101]. 由 (1.42) 及 (1.43) 迭代，当 $mp < n$ 时，我们有

$$[f]_{\frac{np}{n-mp},p} \le C_{n,p}\|D^m f\|_p, \quad \forall\, f \in \mathcal{D}^{m,p}(\Omega). \tag{1.44}$$

由于 $p < np/(n-mp)$，(1.44) 确实是通常 Sobolev 不等式的改进.

第五节　BMO 空间与 HARDY 空间

一、BMO 与 VMO 空间

BMO 空间是 1960 年由 F. John 和 L. Nirenberg [128] 引进的，在偏微分方程、调和分析等相关领域有很多应用. 这里我们只给出其概念和重要性质，详细论证可参考韩永生 [234] 及苗长兴 [236]. BMO($\mathbb{R}^n$) 有一个重要的闭子空间，系由 Sarason [174] 引进的 VMO($\mathbb{R}^n$)，即消逝平均振幅 (vanishing mean oscillation) 函数空间.

1. BMO($\mathbb{R}^n$).

设 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$，$f$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的极大平均振幅定义为

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} := \sup_{B\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y) - f_B|\,\mathrm{d}y,$$

其中 $|B|$ 表示球域 B 的体积，而f_B 为函数 f 在 B 上的平均值，即

$$f_B = \frac{1}{|B|}\int_B f(y)\,\mathrm{d}y.$$

具有有界平均振幅 (bounded mean oscillation) 的函数，简称 BMO 函数，构成 BMO($\mathbb{R}^n$) 空间：

$$\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathrm{BMO}} < \infty\},$$

将 p.p. 相差一个常数的 BMO 函数看作同一个元素，那么，在范数 $\| \|_{\mathrm{BMO}}$ 下，$\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 为一 Banach 空间.

应用中，引进 BMO_q 范数有其灵活的一面. $\|f\|_{\mathrm{BMO}_q}$ 定义为 $|f - f_B|^q$ 在 B 上均值的 q 次方根的上确界. 可以证明，当 $q \geq 1$ 时，BMO_q 范数与 BMO 范数等价 (见苗长兴 [236]).

我们有连续嵌入 $L^\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. 下面的例子说明，$L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 的真子空间. 事实上，直接验证可知 $\log|x| \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$，但显然 $\log|x| \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

BMO 空间的特征可用 John-Nirenberg 不等式 (见 John-Nirenberg [128]) 来刻划. 设 $B \subset \mathbb{R}^n$ 为球体，$f \in L^1_{loc}$，记

$$\mu_{f,B}(\alpha) = \mathrm{meas}\big\{x \in B : |f(x) - f_B| > \alpha\big\}.$$

我们有

定理 1.40 (John-Nirenberg 不等式) *若存在常数 C 和 b 使得对于任意的球体 B 及任意 $\alpha > 0$ 有*

$$\mu_{f,B}(\alpha) \leq C|B|\mathrm{e}^{-b\alpha},$$

那么 $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$; 反之，若 $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$，则存在仅依赖于 n 的常数 C 和 b 使得对于任意的球体 B 及任意 $\alpha > 0$ 成立

$$\mu_{f,B}(\alpha) \leq C|B|\exp\big(-b\alpha/\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big).$$

2. $\mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n)$.

按定义，$f \in \mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n)$，如果 $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 且

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{0<r<\varepsilon} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} \big|f(y) - f_{B_r}\big| \mathrm{d}y = 0.$$

$\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 及 $\mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n)$ 的重要性，除了后面所述 Fefferman 对偶定理，就是下面的 Sobolev 嵌入定理 (见 Brezis-Nirenberg [54], Gautam [103]).

定理 1.41 *我们有连续嵌入 $W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n)$.*

证明 设 $f \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$，设 $B \subset \mathbb{R}^n$ 为一球域，根据 Poincaré 不等式得

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B|\mathrm{d}x \le C\left(\int_B |\nabla f|^n \mathrm{d}x\right)^{1/n} \le C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^n \mathrm{d}x\right)^{1/n}.$$

这里常数 C 不依赖于 B，这是因为上述不等式具有平移不变性与伸缩不变性. 比如，将问题移移植到单位球 $B_1(0)$ 上. 定理由此获证. □

注记 1.15 定理 1.41 给出了 Sobolev 空间 $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ ($s \ge 1$, $p > 1$) 在极端情形 $sp = n$ 的一个嵌入：$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n)$，这是因为此时我们有嵌入 $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$.

二、Hardy 空间 $\mathcal{H}^1$

实 Hardy 空间 $\mathcal{H}^p(\mathbb{R}^n)$ $(p > 0)$ 由 $\mathbb{R}^n$ 上满足一定条件的缓增广义函数构成. 如果 $p > 1$，则 $\mathcal{H}^p$ 与 L^p 等同；$\mathcal{H}^1$ 是 L^1 的真子集；如果 $0 < p < 1$，则 $\mathcal{H}^p$ 包含非函数的广义函数.

1993 年，Coifman-Lions-Meyer-Semmes [79] 发现了一个简单而不同寻常的事实：函数 $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ 的 Jocobi 矩阵 $\det(\nabla u)$ 属于 $\mathcal{H}^1$，参见 153 页引理 5.26. 更一般的结论是：如果向量函数 $B \in L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < \infty)$ 及 $E \in L^{p'}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ 在分布的意义下满足 $\mathrm{rot}B = \mathrm{div}E = 0$，则数量积 $E \cdot B \in \mathcal{H}^1$.

自文献 [79] 发表，Hardy 空间 $\mathcal{H}^1$ 在偏微分方程领域有了更广泛的应用，参见 153 页 H 方程解的正则化及其间所列文献. 本书只用到 $\mathcal{H}^1$，我们给出 $\mathcal{H}^1$ 三种等价的刻划.

1. 极大函数刻划.

我们需要 Schwartz 速降函数空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的概念. 它由满足如下性质的所有光滑函数构成：$\lim\limits_{|x|\to\infty} |x|^k |D^m \phi(x)| = 0$.

设 ϕ 是 Schwartz 速降函数空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中的函数，对于 $t > 0$，定义

$$\phi_t(x) = t^{-n}\phi(x/t), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，分别定义 f 关于 ϕ 的 径向极大函数 $m_\phi f$ 及 非切向极大函数

$M_\phi f$ 如下：

$$(m_\phi f)(x) = \sup_{t>0} |f * \phi_t(x)|,$$

$$(M_\phi f)(x) = \sup_{|y-x|<t<\infty} |f * \phi_t(y)|.$$

Fefferman-Stein [99] 证明，对于 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，下列三条件等价：

1) 对于某个 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，且 $\int \phi \neq 0$，成立 $m_\phi f \in L^1(\mathbb{R}^n)$;

2) 对于某个 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，且 $\int \phi \neq 0$，成立 $M_\phi f \in L^1(\mathbb{R}^n)$;

3) 对于所有 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，成立 $M_\phi f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，而且对于 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的一个适当的有界集，一致地有 $M_\phi f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Hardy 空间 $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ 就定义为满足上述条件的函数 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 的集合. $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ 赋予范数 $\|m_\phi f\|_{L^1}$ 或（等价地）$\|M_\phi f\|_{L^1}$ 后，成为 Banach 空间.

可以证明，$\mathcal{H}^1$ 是 L^1 的真子集.

2. 原子刻划.

$\mathcal{H}^1$ 可用所谓 $\mathcal{H}^1$ 原子来刻划. 可测函数 α 叫做一个 $\mathcal{H}^1$ 原子，如果

(i) $\operatorname{sppt} \alpha \subset B_r(x_0)$，且 $\sup_x |\alpha(x)| \leq r^{-n}$;

(ii) 积分 $\int \alpha(x) \mathrm{d}x = 0$.

原子分解定理表明，$f \in \mathcal{H}^1$ 的充分必要条件是 f 能够（在几乎处处的意义下）分解为：

$$f = \sum c_k \alpha_k, \quad \alpha_k \text{ 是 } \mathcal{H}^1 \text{ 原子且 } \sum |c_k| < \infty. \tag{1.45}$$

这时，可赋 $\mathcal{H}^1$ 以等价范数：

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1} = \inf \left\{ \sum |c_k| : \text{对 } f \text{ 所有可能的原子分解 (1.45)} \right\}.$$

由原子分解定理可见：$f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) \implies \int f(x) \mathrm{d}x = 0.$

3. 用 Riesz 变换刻划.

Hardy 空间$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ 也可用 Riesz 变换来刻划. 第 j $(1 \leq j \leq n)$ 个 Riesz 变换 R_j 的定义是

$$R_j f(x) = \text{p.v.} K_j * f(x), \quad \text{而 } K_j = C_n \frac{x_j}{|x|^{n+1}}.$$

这里 $C_n = \pi^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})$，p.v. 表示积分取主值．Riesz 变换也可形式地表示为

$$R_j = \partial_j(-\Delta)^{-1/2},$$

其中 $(-\Delta)^{-\alpha/2}$ $(0 < \alpha < n)$ 是 Riesz 位势，即

$$(-\Delta)^{-\alpha/2}f(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)}\int \frac{f(y)\mathrm{d}y}{|x-y|^{n-\alpha}}.$$

在这些记号下，我们给出 $\mathcal{H}^1$ 的另一种刻划：

$$\mathcal{H}^1 = \{f \in L^1 : R_j f \in L^1,\ 1 \le j \le n\},$$

定理 1.42 (Stein-Weiss [191]) Riesz 变换是映 $\mathcal{H}^1$ 到自身的有界线性算子.

定理 1.42 的结论对于 $\mathcal{H}^p$ $(0 < p \le 1)$ 也成立，Lee [130] 给出 4 种不同的证明．最后，我们给出著名的 Fefferman 定理，其证明可见 Fefferman [99]，陆善镇 [235]，韩永生 [234].

定理 1.43 (Fefferman 对偶定理) 我们有如下对偶关系

$$(\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n))^* = \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n); \quad (\mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n))^* = \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n).$$



有界区域上的非线性椭圆方程

第二章 BREZIS-NIRENBERG模型

数学物理中有一类现象，刻画这类现象的偏微分方程所对应的变分泛函不满足全局紧性条件，或者说处在紧性条件的边缘，这样，经典的变分法便不能用于解决这些问题. 几何中著名的 Yamabe 问题，Plateau 问题，极小曲面的浸入问题，古典的等周问题以及量子场论中著名的 Yang-Mills 方程非极小解的存在性问题，都属于这一类. 其中最著名的就是 Yamabe 问题.

Brezis-Nirenberg [52] (1983) 研究了欧氏区域上一个与 Yamabe 方程极其类似的模型，是从分析上认识这类问题的经典之作.

第一节 BREZIS-NIRENBERG 模型

一、几何背景

1960 年，Yamabe 为了解决三维 Poincaré 猜想 (已由 G. Perelman 证明, 见 Yau [213])，在文献 [212] 中提出一个命题:

设 (M,g) 是一 $n\geq 3$ 维紧致光滑 Riemann 流形，则存在一个与 g 共形等价 (conformal equivalent) 的度量 $\tilde{g}$，使得 $(M,\tilde{g})$ 的标量曲率是一常数.

这一命题 (后来称之为 Yamabe 猜想) 等价于下列 Yamabe 方程正解的存在性:

$$-\Delta u+Su=\tilde{S}u^{(n+2)/(n-2)}, \qquad \text{(Yamabe)}$$

其中 Δ 是 Beltrami-Laplace 算子 (见第 175 页)，$-\Delta+S$ 是共形 Laplace 算子 (见第 180 页)，$\tilde{S}$ 是实常数.

Yamabe 声称这一问题已经解决，但八年后 Trüdinger [202] (1968) 发现其证明有严重错误. 除了其中一种简单情形，Trüdinger 未能更正其错误.

Yamabe 问题实质性的进展要再过八年，Th. Aubin [3] (1976) 通过巧妙构造试验函数，就 $n \geq 6$ 且 (M, g) 不处处局部共形平坦的情形，解决了 Yamabe 问题．籍此，流形上的分析得到新的发展．

Th. Aubin [3] 的工作后又八年 (很凑巧)，R. Schoen [176] (1984)，运用广义正质量定理，最终证明了其余情形的 Yamabe 问题．

为了从分析上让读者认识 Yamabe 问题以及本章开头提到的同类问题，Brezis-Nirenberg [52] (1983) 研究了有界欧氏区域上一个模型化问题：设 Ω 是 $n \geq 3$ 维欧氏空间中的有界区域，求一个函数 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$，使得

$$\begin{aligned} -\Delta u &= u^{N-1} + \lambda u, && \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u &> 0, && \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u &= 0, && \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $N = 2n/(n-2)$ 是临界 Sobolev 嵌入指标，λ 是一实常数．

问题 (2.1) 是变分的，它的解对应 $H_0^1(\Omega)$ 上下列泛函的非负临界点：

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int \left(|\nabla|^2 - \lambda u^2\right) - \frac{1}{N}\int |u|^N. \tag{2.2}$$

我们将用另一种方法，即通过条件极值来讨论．引进 Yamabe 商

$$Q_\lambda(u) = \frac{\|\nabla u\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2}{\|u\|_N^2}, \quad u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.3}$$

考虑 $Q(\lambda, u)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上的下确界，即讨论条件极值问题

$$S_\lambda = \inf\{\, Q_\lambda(u) : u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\|_N = 1\}, \tag{2.4}$$

若 $u \in H_0^1(\Omega)$ 是上述问题的极值函数 (可设 $u \geq 0$ 否则用 $|u|$ 取代)，则 u 满足

$$-\Delta u - \lambda u = S_\lambda u^{N-1}$$

如果 $S_\lambda > 0$，则拉伸 Lagrange 乘数 S_λ (即令 $v = \mu u$，$\mu = S_\lambda^{\frac{4}{n-2}}$)，那么 v 便是问题 (2.1) 的一个弱解．

二、紧性的丧失　Pohozaev 障碍

1. **紧性的丧失**.

解决问题 (2.1)，最大困难来自指标 $N = \frac{2n}{n-2}$，因为它恰好对应临界 Sobolev 嵌入 $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^N(\Omega)$，这个嵌入只是连续的而非紧的，范数 $\|u\|_N$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 的弱拓扑下不连续，其后果就是在 $H_0^1(\Omega)$ 上，泛函 $Q_\lambda(u)$ 不满足下半弱连续条件，泛函 Φ 不满足全局的 (P.-S.) 条件，因而经典的变分法在此失效.

我们将问题 (2.1) 所代表的非线性现象称为*临界非线性*，或*极限非线性*. Yamabe 问题反映在变分法上正是这种情形.

相反地，当问题 (2.1) 中指标 N 换作 $p \in (2, \frac{2n}{n-2})$ 时，就称问题为*次临界*的. 在次临界情形，嵌入 $H_0^1(\Omega) \to L^p(\Omega)$ 是紧的，范数 $\|u\|_p$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中序列弱连续，泛函 Φ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上满足 (P.-S.) 条件，因而对于所有 $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$，问题 (2.1) 都有一解. 这里，$\lambda_1$ 为 $-\Delta$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上的第一特征值.

2. Pohozaev **障碍**.

从另一方面看，当 N 取临界指标时，问题 (2.1) 的解满足如下特殊形式的 Pohozaev 恒等式 (见稍后的 (2.7) 式及命题 2.2)：

$$\lambda \int_\Omega u^2 = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nu) \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2. \tag{2.5}$$

其中 ν 是 $\partial\Omega$ 的单位外法矢量. 据此，我们有

命题 2.1　*若 Ω 是一星形区域，则当 $\lambda \le 0$ 时问题 (2.1) 无解.*

证明　设 u 是问题 (2.1) 的解，对于星形区域，我们有 $(x \cdot \nu) \ge 0$ a.e. 于 $\partial\Omega$. 当 $\lambda < 0$ 时，由 (2.5) 立得 $u \equiv 0$. 当 $\lambda = 0$ 时，由 (2.5) 推得 $(\partial u/\partial\nu)|_{\partial\Omega} \equiv 0$. 在 (2.1) 两边积分，应用 Green 公式得

$$\int_\Omega u^{N-1} = \int_\Omega -\Delta u = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0,$$

从而 $u \equiv 0$. □

我们把命题 2.1 所述的现象称为 Pohozaev 障碍. 它再次表明临界与次临界情形的显著区别.

3. Pohozaev 恒等式.

现在补上 Pohozaev 恒等式的有关内容. 1965 年，Pohozaev [169] 发现了一个极其简单的变分恒等式，对证明某些 Dirichlet 问题不存在性结论十分有力.

设 Ω 是 $n \geq 2$ 维欧氏空间中的有界区域. 考虑边值问题

$$-\Delta u = g(u) \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \partial\Omega. \tag{2.6}$$

这里的 g 是一连续函数. 如果 u 是 问题 (2.6) 的解，Pohozaev 证明，u 满足

$$n\int_\Omega G(u) - \frac{n-2}{2}\int_\Omega u\,g(u) = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)\Big(\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big)^2, \tag{2.7}$$

其中 $G(u) = \int_0^u g(t)\,\mathrm{d}t$，$\nu$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法矢量. 公式 (2.7) 就是著名的 Pohozaev 恒等式.

特别在 Brezis-Nirenberg 模型，$g = |u|^{N-2}u + \lambda u$，$N = \frac{2n}{n-2}$，$\lambda$ 是常数，Pohozaev 恒等式就表现为 (2.5) 的形式.

自从 Pohozaev [169] 的工作以来, 数学分析工作者对 Pohozaev 恒等式作过许多推广工作, 全面而深入的要数 Pucci-Serrin [183] 的工作. 就本书的应用而言，只需下列形式的 Pohozaev 恒等式.

命题 2.2 设 g 是 $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$ 上的连续函数，$u \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ 是边值问题

$$-\Delta u = g(x,u) \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \tag{2.8}$$

的解，则 u 满足如下恒等式

$$\int_\Omega\Big[nG - \frac{n-2}{2}ug + x\cdot G_x\Big] = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)\Big(\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big)^2, \tag{2.9}$$

其中 $G(x,s) = \int_0^s g(x,t)\,\mathrm{d}t$，$G_x(x,s) = \nabla_x G(x,s)$.

证明 这个证明引自丁伟岳与倪维明 [88]. 设 $u = u(x)$ 是 (2.9) 的解，令

$$V(x) = (x\cdot\nabla u)\nabla u - \frac{1}{2}x|\nabla u|^2 + xG(x,u) + \frac{n-2}{2}u\nabla u.$$

因在 $\partial\Omega$ 上 $u = 0$，故 $\nabla u = (\partial u/\partial\nu)\nu$，而 $V(x)\cdot\nu = (1/2)(\partial u/\partial\nu)^2$. 又

$$\operatorname{div} V = nG(x,u) - \frac{n-2}{2}ug(x,u) + x\cdot G_x(x,u),$$

应用散度定理 (见第 16 页) 便得结论. □

4. **不存在性结论.**

我们已经由 Pohozaev 恒等式知道，在临界情形 (超临界情形也一样)，如果区域 Ω 星形，则当 $\lambda \leq 0$ 时问题 (2.1) 无解. 此外，不论 N 是否为临界指标，我们都有

命题 2.3 问题 (2.1) 存在正解的必要条件是 $\lambda < \lambda_1$，即当 $\lambda \geq \lambda_1$ 时问题 (2.1) 无解.

证明 设 u 是问题 (2.1) 的正解，并设 φ 为属于特征值 λ_1 的正特征函数. 用 φ 乘方程 (2.1) 两边，积分，由 Green 公式推知

$$\lambda_1 \int u\varphi_1 = \int(-\Delta u)\varphi_1 = \int\left(u^{N-1} + \lambda u\right)\varphi_1 > \lambda \int u\varphi_1,$$

从而 $\lambda < \lambda_1$. □

根据命题 2.1 及 2.3，对于问题 (2.1)，合理的提法是：给定 $\lambda \in (0, \lambda_1)$，问非线性问题 (2.1) 是否存在解? 下面我们将看到，这个问题依赖于空间的维数，对于 $n = 3$ 及 $n \geq 4$，问题有不同的结论.

三、变分方法

我们将通过考察极值问题 (2.4) 来获得问题 (2.1) 的解. 因泛函 $u \mapsto \|u\|_N$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 的弱拓扑下不连续，为克服这一困难，需细致地考察 S_λ 与最佳 Sobolev 常数 S 之间的关系，这一思想方法属于 Aubin [3].

1. **最佳 Sobolev 常数及其极值函数.**

最佳常数 S 的特性. Sobolev 不等式说，存在只依赖于 n 的常数 S，使得

$$S\|u\|_N^2 \leq \|\nabla u\|_2^2, \quad \forall u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n), \tag{2.10}$$

使上式成立的最大常数 S 叫做最佳 Sobolev 常数，即

$$S = \inf\{Q_0(u) : 0 \not\equiv u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)\}. \tag{2.11}$$

关于最佳 Sobolev 常数，我们有

命题 2.4 设 Ω 是 $n \geq 3$ 维区域，则 $S = \inf\{Q_0(u) : 0 \neq u \in \mathcal{D}^{1,2}(\Omega)\}$，即最佳 Sobolev 常数与区域无关，仅与维数 n 有关.

证明 可以验证，泛函 $Q_0(u)$ 具有伸缩不变性及平移不变性，即

$$Q_0(u(\sigma x + h) = Q_0(u(x)), \quad \forall\, \sigma > 0, \forall\, h \in \mathbb{R}^n,$$

由此及 C_c^∞ 函数在 $\mathcal{D}^{1,2}$ 中的稠密性，便获证命题. □

命题 2.5 设 Ω 是 $n \geq 3$ 维有界区域，则最佳 Sobolev 常数不能在 $H_0^1(\Omega)$ 上达到.

证明 用反证法. 若 S 为某一函数 $0 \neq u_0 \in H_0^1(\Omega)$ 所达到，不妨设 $u_0 \geq 0$，否则用 $|u_0|$ 代替. 取一个球 $B \supset \Omega$. 扩充 u_0 的定义，使得在 $B - \Omega$ 上 $u_0 = 0$. 扩充后 $u_0 \in H_0^1(B)$. 根据命题 2.4，u_0 是极值问题

$$S = \inf\{\, \|\nabla u\|_2^2 : u \in H_0^1(B),\ \|u\|_N^2 = 1\}$$

的解，由 Lagrange 乘数法，存在 $\mu > 0$ 使得 $u_0 \in H_0^1(B)$ 满足方程

$$-\Delta u_0 = \mu u_0^{N-1} \quad 在 B 上.$$

这与 Pohozaev 恒等式 (见第 50 页) 矛盾 (参见第 49 页命题 2.1 的证明). □

注记 2.1 根据最佳 Sobolev 常数极值函数的唯一性 (2.6)，只要 $\Omega \neq \mathbb{R}^n$，则最佳常数 S 不能为函数 $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\Omega) \subset \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ 所取到.

最佳常数 S 的极值函数. 最佳 Sobolev 常数及其极值函数最早的结论属于 Aubin [2] 及 Talenti [197]. 在本书将用凝聚紧性原理证明 (见定理 10.6)，极值问题 (2.11) 存在极值函数 φ，而且是径向对称的 (顶多相差一个平移). 因此 φ 是下列常微分方程初值问题的解：

$$\varphi'' + \frac{n-1}{r}\varphi' + \varphi^{N-1} = 0, \quad \varphi(0) = a,\ \varphi'(0) = 0. \tag{2.12}$$

其中 $a > 0$. 此初值问题在 $[0, \infty)$ 存在唯一解，因它等价于积分方程

$$\varphi(r) = a + \int_0^r \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{n-1} \varphi^{N-1}(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t,$$

利用压缩映象原理可证明，上述积分方程在 $[0, \varepsilon]$ 上有唯一解. 当 $r \geq \varepsilon$ 时是正则常微分方程. 当 $r > 0$ 时 $\varphi > 0$ (否则将与 Pohozaev 恒等式矛盾).

取 $\varphi = (a + br^2)^k$ 的形式代入方程 (2.12)，经计算得

$$\varphi = K_a(a^2 + r^2)^{(2-n)/2},$$

直接计算可得 $S = 4^{-1}n(n-2)\omega_n^{2/n}$，$\omega_n$ 是 n 维单位球面 S^n 的体积 (见 Aubin [2, 3], 也见第 7 章的 195 页)．概括起来就是：

定理 2.6 最佳 Sobolev 常数 $S = 4^{-1}n(n-2)\omega_n^{2/n}$，且可被 $\mathbb{R}^n$ 上的函数

$$\psi = (1 + |x|^2)^{(2-n)/2}$$

达到，或经平移及伸缩变换被唯一函数族 $C(\varepsilon^2 + |x - x_0|^2)^{(2-n)/2}$ 达到，ε, C 是任意正常数，$x_0 \in \mathbb{R}^n$ 任意.

2. 存在性的 Aubin 型判据.

显然，当 $\lambda = 0$ 时，$S_0 = S$，而且不难验证，

$$S_\lambda > (= \text{ 或 } <)\, 0 \Longleftrightarrow \lambda < (= \text{ 或 } >)\, \lambda_1.$$

下面给出极值问题 (2.4) 存在解的一个判据．这类形式的定理最早见于 Aubin [3]，也可参见 Aubin [5]，Lieb [136] 及 Brezis-Nirenberg [52].

引理 2.7 对所有实数 λ 成立 $S_\lambda \le S$. 如果 $S_\lambda < S$，则由 (2.4) 式给出的下确界 S_λ 可为某一非负函数 $u \in H_0^1(\Omega)$ 取到. 如果 $0 < S_\lambda < S$，则问题 (2.1) 至少存在一个正解.

证明 引理可照 Aubin [3] 原来的证明完成（参见第 197 页）．现在的证明在 Brezis-Nirenberg [52] 基础上参照 Brezis-Coron [48] 改进而来.

我们将结论 $S_\lambda \le S$ 的证明放在稍后的注记 2.5．设 $u_m \in H_0^1(\Omega)$ 是极值问题 (2.4) 的一个极小化序列，满足

$$\|\nabla u_m\|_2^2 - \lambda\|u_m\|_2^2 = S_\lambda + o(1), \quad \|u_m\|_N = 1. \tag{2.13}$$

因为 u_m 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界，可抽取子列，仍记为 u_m，使得

$$u_m \xrightarrow{w} u \quad 在\ H_0^1\ 中, \quad u_m \xrightarrow{s} u \quad 在\ L^2\ 中,$$

$$u_m \xrightarrow{\text{a.e.}} u \quad 在\ \Omega\ 中.$$

继而，依 Fatou 引理，我们有 $\|u\|_N \le 1$. 若能证明 $\|u\|_N = 1$，则 u 就是极值问题 (2.4) 的解. 为此将 u_m 分解为 $u_m = u + \theta_m$，于是

$$\theta_m \xrightarrow{w} 0 \quad 在\ H_0^1\ 中, \qquad \theta_m \xrightarrow{\text{a.e.}} 0 \quad 在\ \Omega\ 中.$$

此时由 (2.13) 式得

$$\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla \theta_m\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 = S_\lambda + o(1). \tag{2.14}$$

利用关系 $S_\lambda \le Q_\lambda(u)$，我们有

$$S_\lambda \|u\|_N^2 \le \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2,$$

结合 (2.14) 得

$$\|\nabla \theta_m\|_2^2 \le S_\lambda\big(1 - \|u\|_N^2\big) + o(1). \tag{2.15}$$

另一方面，根据 Brezis-Lieb 引理，我们有

$$1 = \|u + \theta_m\|_N^N = \|u\|_N^N + \|\theta_m\|_N^N + o(1).$$

注意到 $N > 2$，我们有

$$1 \le \|u\|_N^2 + \|\theta_m\|_N^2 + o(1).$$

根据最佳 Sobolev 不等式 $S\|\theta_m\|_N^2 \le \|\nabla \theta_m\|_2^2$，由上式得

$$1 \le \|u\|_N^2 + \frac{1}{S}\|\nabla \theta_m\|_2^2 + o(1),$$

或等价地

$$\|\nabla \theta_m\|_2^2 \ge S\big(1 - \|u\|_N^2\big) + o(1). \tag{2.16}$$

由 (2.16) 式减去 (2.15) 式，得到

$$\big(S - S_\lambda\big)\big(1 - \|u\|_N^2\big) \le 0.$$

因 $S_\lambda < S$，上式表明 $\|u\|_N = 1$. 回到 (2.15) 式便得 $\lim \|\nabla \theta_m\|_2 = 0$，即 u_m 在 H_0^1 中强收敛于 u. 由 (2.14) 知，S_λ 被 u 取到.

我们可以假定 $u \geq 0$，否则用 $|u|$ 替代（注意 $\||\nabla|u|\|_2^2 \leq \|\nabla u\|_2^2$）. 因为 u 是极值问题 (2.4) 的解，存在 Lagrange 乘数 μ 使得

$$-\Delta u - \lambda u = \mu u^{N-1}, \quad x \in \Omega.$$

当 $S_\lambda > 0 \iff \lambda < \lambda_1$ 时，我们有 $\mu > 0$. 令 $v = \mu^{1/(N-2)} u$，则 v 满足方程 (2.1). 根据正则化理论 (见本节末)，$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$，由强极大值原理，$v > 0$. □

在引理 2.7 的证明中，我们实际上证明了如下命题.

命题 2.8 如果 $S_\lambda < S$，则由 (2.13) 定义的任意一个（S_λ 的）极小化序列，在 $H_0^1(\Omega)$ 中都是相对（强）列紧的.

注记 2.2 在引理 2.7 的证明中，不等式 (2.16) 起关键作用. 但在 $S_\lambda \leq 0$ 的情形，不必应用这一关键不等式，而由不等式 (2.15) 直接推出 $\lim \|\nabla \theta_m\|_2 = 0$. 这也部分地说明了为何 Trudinger 能够在 Yamabe 不变量 $\lambda(M) \leq 0$ 的情况下挽救 Yamabe 的证明的原因.

注记 2.3 从以上讨论看出，对于 $\lambda \in (0, \lambda_1)$，若能找到一个试验函数 φ 使得 Yamabe 商 $Q_\lambda(\varphi) < S$，从而 $S_\lambda < S$，则问题 (2.1) 至少存在一个解.

3. **解的正则性.**

本节中通过变分法得到的解 u 是 $H_0^1(\Omega)$ 中的弱解. 若记 $h = u^{N-2} + \lambda$，由 Sobolev 嵌入知，$h \in L^{n/2}(\Omega)$，且 u 在弱的意义下满足

$$-\Delta u = hu.$$

根据 Brezis-Kato 正则化引理 (见 310 页引理 A.16)，$u \in L^r(\Omega), \forall r \geq 2$. 根据一般的正则性结论，$u \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. 此外，只要边界 $\partial\Omega$ 适当光滑，u 在边界 $\partial\Omega$ 上就有适当的光滑性.

第二节 试验函数及其估计

根据 Aubin 型判据 (引理 2.7) 及注记 2.3，问题 (2.1) 解的存在性归结为找一个试验函数 φ，使得 $Q_\lambda(\varphi) < S$.

在构造试验函数时，$\mathbb{R}^n$ 上最佳 Sobolev 不等式 $S\|u\|_N^2 \le \|\nabla u\|_2^2$ 的极值函数起决定作用，我们取极值函数 (参见 53 页定理 2.6)

$$\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{(n-2)/2}}, \quad 及 \ \psi(x) \triangleq \psi_1. \tag{2.17}$$

若令 $\phi_\varepsilon \triangleq \varepsilon^{(n-2)/2}\psi_\varepsilon$，则

$$\|\nabla \phi_\varepsilon\|_2^2 = \|\nabla \psi\|_2^2 = S\|\phi_\varepsilon\|_N^2 = S\|\psi\|_N^2.$$

直接验算可知，$\phi_\varepsilon \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$，并且满足方程

$$-\Delta \phi_\varepsilon = n(n-2)\phi_\varepsilon^{N-1} \quad 在 \ \mathbb{R}^n \ 中. \tag{2.18}$$

根据 Gidas-Ni-Nirenberg [107]，ϕ_ε 及其平移是 (2.18) 的唯一解族. 由分部积分可得

$$\|\nabla \psi\|_2^2 = n(n-2)\|\psi\|_N^N. \tag{2.19}$$

以下分两种情形 $n \ge 4$ 及 $n = 3$ 讨论.

一、情形 $n \ge 4$

在情形 $n \ge 4$，我们可以简单地用截断 ψ_ε 的方法给出所需试验函数. 这样的试验函数，源于 Aubin [3]. 在情形 $n = 3$，我们将使用 Scshoen 的试验函数，它的构造要同时考虑 $-(\Delta + \lambda)$ 的 Green 函数.

方便起见，我们不妨假设原点 $o \in \Omega$. 设 $\eta \in C_0^2(\Omega; [0,1])$ 是一个 截断函数，满足

$$\eta(x) = 1, \ x \in B_\delta; \quad \eta(x) = 0, \ x \in \Omega - B_{2\delta},$$

其中 B_δ 是 Ω 中以原点 o 为中心，具充分小半径 δ 的球. 现在构造函数 $u_\varepsilon(x) = \eta(x)\psi_\varepsilon(x)$，即

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\eta(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{(n-2)/2}}. \tag{2.20}$$

将试验函数 $u = u_\varepsilon(x)$ 代入由 (2.3) 式给出的 Yamabe 商 $Q_\lambda(u)$ 进行估计，便得如下

引理 2.9 当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时，$Q_\lambda(u_\varepsilon)$ 有如下展式:

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = \begin{cases} S - \lambda K(n)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{n-2}), & n \geq 5, \\ S - \lambda K(4)\varepsilon^2 |\log \varepsilon| + O(\varepsilon^2), & n = 4, \end{cases}$$

其中 $K(n)$ 是只与维数 n 有关的正数.

证明 注意到 $\|\nabla\psi\|_2^2/\|\psi\|_N^2 = S$，显见引理 2.9 是下列估计的直接推论:

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \|\nabla\psi\|_2^2\,\varepsilon^{2-n} + O(\varepsilon^2), \quad n \geq 3, \tag{2.21}$$

$$\|u_\varepsilon\|_N^2 = \|\psi\|_N^2\,\varepsilon^{2-n} + O(1), \qquad n \geq 3, \tag{2.22}$$

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \begin{cases} I_n\,\varepsilon^{4-n} + O(1), & n \geq 5, \\ I_4\,|\log\varepsilon| + O(1), & n = 4. \end{cases} \tag{2.23}$$

其中 I_n 是只与维数 n 有关的正数.

(2.21) 的验证. 我们有

$$\nabla u_\varepsilon = \nabla(\eta\psi_\varepsilon) = \eta\nabla\psi_\varepsilon + \psi_\varepsilon\nabla\eta.$$

因为当 $x \in B_\delta$ 时，$\eta(x) = 1$，$\nabla\eta(x) = 0$，而在 B_δ 外 ψ_ε 有界，故

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{2,\Omega}^2 = \|\nabla\psi_\varepsilon\|_{2,B_\delta}^2 + O(1),$$

而

$$\begin{aligned}\int_{B_\delta} |\nabla\psi_\varepsilon|^2 &= \int_{B_\delta} \frac{(n-2)^2|x|^2}{(\varepsilon^2+|x|^2)^n}\mathrm{d}\,x + O(1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(n-2)^2|x|^2}{(\varepsilon^2+|x|^2)^n}\mathrm{d}\,x + O(1) \\ &= \|\nabla\psi\|_2^2\,\varepsilon^{2-n} + O(1),\end{aligned}$$

这样便有

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \|\nabla\psi\|_2^2\,\varepsilon^{2-n} + O(1).$$

(2.22) 的验证.　因 ψ_ε 从而 u_ε 在 $\Omega\setminus B_\delta$ 上有界，而在 B_δ 上 $u_\varepsilon=\psi_\varepsilon$，故

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^N = \int_{B_\delta}|\psi_\varepsilon|^N + O(1) = \int_{\mathbb{R}^n}|\psi_\varepsilon|^N + O(1)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\mathrm{d}\,x}{(\varepsilon^2+|x|^2)^n} + O(1) = \|\psi\|_N^N\,\varepsilon^{-n} + O(1),$$

故
$$\|u_\varepsilon\|_N^2 = \|\psi\|_N^2\,\varepsilon^{2-n} + O(1).$$

(2.23) 的验证.　最后，我们给出 $\|u_\varepsilon\|_2^2$ 的估计，这是最需精细之所在. 与 (2.22) 式的验证类似，我们有

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^2 = \int_{B_\delta}|\psi_\varepsilon|^2 + O(1) = \int_{B_\delta}\frac{\mathrm{d}\,x}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{n-2}} + O(1),$$

当 $n\ge 5$ 时，上式右端积分

$$\int_{B_\delta}\frac{\mathrm{d}\,x}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{n-2}} = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\mathrm{d}\,x}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{n-2}} + O(1)$$
$$= \|\psi\|_2^2\,\varepsilon^{4-n} + O(1),$$

所以
$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^2 = \|\psi\|_2^2\,\varepsilon^{4-n} + O(1). \tag{2.24}$$

当 $n=4$ 时，则有

$$\int_{B_\delta}\frac{\mathrm{d}\,x}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{n-2}} = \omega_3\int_0^\delta \frac{r^3\mathrm{d}\,r}{(\varepsilon^2+r^2)^2} = \frac{1}{2}\omega_3|\log\varepsilon| + O(1),$$

其中 ω_3 是单位球面 $\mathbb{S}^3$ 的面积，于是 $n=4$ 时

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^2 = \frac{1}{2}\omega|\log\varepsilon| + O(1). \tag{2.24'}$$

(2.24) 与 (2.24′) 综合即 (2.23)，其中 $I_n=\|\psi\|_2^2\ (n\ge 5)$，$I_4=2^{-1}\omega_3$.　□

据引理 2.9，当 $n\ge 4$ 时，对于一切 $\lambda>0$ 都有 $S_\lambda<S$. 由引理 2.7 立得

定理 2.10　当 $n\ge 4$ 时，对一切 $\lambda\in(0,\lambda_1)$，问题 (2.1) 都存在解.

注记 2.4　当 $n=3$ 时，我们有

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^2 = \int_{B_\delta} \frac{\mathrm{d}x}{\varepsilon^2+|x|^2} + O(1) = \omega_2 \int_0^\delta \frac{r\,\mathrm{d}r}{\varepsilon^2+r^2} = O(1),$$

如果我们坚持用 (2.20) 定义的试验函数去估计 $Q_\lambda(u_\varepsilon)$，我们只能得到

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = S + O(\varepsilon), \quad (n=3) \tag{2.25}$$

这对我们认识问题 (2.1) 没有什么帮助. $n=3$ 的情形需要更精细的估计.

注记 2.5　设 Ω 是 $n \geq 3$ 维欧氏空间的有界区域，则对一切 $\lambda \leq 0$ 成立 $S_\lambda = S$，而且根据 Pohozaev 不等式，$S_\lambda = S$ 不能为 $Q_\lambda(u)$ 所达到.

确实，依引理 2.9 及注记 2.4，$Q_\lambda(u_\varepsilon) = S + o(1)$，从而 $S_\lambda \leq S$. 另一方面，S_λ 关于 λ 单调递减，从而 $(\lambda \leq 0) \Rightarrow (S_\lambda \geq S)$，根据命题 2.4，$S$ 不能为 $Q_0(u)$ 所达到，是故更不会被 $Q_\lambda(u)$ 达到.

二、情形 $n=3$

1. Brezis-Nirenberg 的路线.

粗略地说，在情形 $n=3$，Brezis-Nirenberg 模型问题 (2.1) 只对接近 λ_1 的 λ 值才有解. 特别，如果 Ω 是一个球域，则当且仅当 $\lambda \in (\lambda_1/4, \lambda_1)$ 时，问题 (2.1) 有解 (定理 2.13).

不妨设 $o \in \Omega$，取函数 $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C_0(\overline{\Omega})$，使得 $\varphi(0)=1$，$\nabla\varphi(0)=0$. 构造试验函数 $u_\varepsilon(x) = \varphi(x)\psi_\varepsilon(x)$，即

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\varphi(x)}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{1/2}}. \tag{2.26}$$

利用上述试验函数估计 Yamabe 商 $Q_\lambda(u_\varepsilon)$，我们有

命题 2.11　当 $n=3$ 时，对于由 (2.26) 定义的试验函数 u_ε，有如下估计

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = S + \frac{\varepsilon}{K}\int_\Omega \frac{|\nabla\varphi|^2 - \lambda|\varphi|^2}{|x|^2} + O(\varepsilon^2).$$

其中 $K = \|\psi\|_6^2$.

我们不打算证明命题 2.11，读者可参照 Brezis-Nirenberg [52] (原文只讨论了 Ω 为球的情形) 给出证明.

定理 2.12 设 Ω 为三维球域，则当 $\lambda \in (\lambda_1/4, \lambda_1)$ 时，问题 (2.1) 至少具有一解.

定理 2.12 也可作为下文定理 2.14 的推论，重新获得证明.

证明 我们不妨设球心在原点，半径为 π (此时第一特征值 $\lambda_1 = 1$，相应的特征函数为 $|x|^{-1}\sin|x|$). 取 φ 为径向对称函数，则

$$\frac{\int_\Omega \left(|\nabla\varphi|^2/|x|^2\right)}{\int_\Omega \left(|\varphi|^2/|x|^2\right)} = \frac{\int_0^\pi |\varphi'|^2 \mathrm{d}r}{\int_0^\pi |\varphi|^2 \mathrm{d}r}.$$

上式中的下确界 μ_1 对应下列特征值问题的第一特征值，

$$-\varphi'' = \mu\varphi, \quad \varphi'(0) = \varphi(\pi) = 0,$$

但属于 μ_1 的特征函数为 $\cos(r/2)$，由此算得 $\mu_1 = 1/4$. 令 $\varphi = \cos(r/2)$，u_ε 为 (2.26) 所给，依命题 2.11，

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = S - (\pi/8)K^{-1}(4\lambda - \lambda_1)\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

故当 $\lambda \in (\lambda_1/4, \lambda_1)$ 时，对于充分小的 $\varepsilon > 0$，我们有 $Q_\lambda(u_\varepsilon) < S$. 依据 Aubin 型判据——引理 2.7，问题 (2.1) 至少具有一解. □

定理 2.13 (Brezis-Nirenberg [52]) 设 Ω 是三维球域，则当且仅当 $\lambda \in (\lambda_1/4, \lambda_1)$ 时，问题 (2.1) 有解.

证明 我们已经知道，$\lambda \le 0$ 或 $\lambda \ge \lambda_1$ 时问题 (2.1) 无解，故只须证明当 $0 < \lambda \le \lambda_1/4$ 时，问题 (2.1) 无解.

用反证法，设若 $0 < \lambda \le \lambda_1/4$ 时问题 (2.1) 有解 u，根据 Gidas-Ni-Nirenberg [107]，u 必是球面对称函数，若仍设 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \le \pi\}$，则 u 满足

$$\begin{cases} -u'' - \dfrac{2}{r}u' = u^5 + \lambda u, \\ u'(0) = u(\pi) = 0. \end{cases} \tag{2.27}$$

取 $[0, \pi]$ 上的光滑函数 ϕ 使得 $\phi(0) = 0$，用 $(\frac{1}{2}r^2\phi' - r\phi)u$ 乘方程 (2.27) 得

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \left(\frac{1}{2}r^2\phi' - r\phi\right)|u'|^2\, dr - \frac{1}{4}\int_0^\pi u^2\phi''' r^2\, dr \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}r^2\phi' - r\phi\right)u^6\, dr + \lambda\int_0^\pi \left(\frac{1}{2}r^2\phi' - r\phi\right)u^2\, dr. \end{aligned} \tag{2.28}$$

然后将方程 (2.27) 两边乘以 $r^2\phi u'$，积分得

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi\Big(\frac{1}{2}r^2\phi'-r\phi\Big)|u'|^2\,dr-\frac{1}{2}|u'(\pi)|^2\phi(\pi)\\&\quad=-\frac{1}{6}\int_0^\pi\Big(2r\phi+r^2\phi'\Big)u^6\,dr-\frac{1}{2}\lambda\int_0^\pi\Big(2r\phi+r^2\phi'\Big)u^2\,dr.\end{aligned}\tag{2.29}$$

将 (2.28) 和 (2.29) 合起来，得

$$\int_0^\pi\Big(\lambda\phi'+\frac{1}{4}\phi'''\Big)u^2r^2\,dr=\frac{2}{3}\int_0^\pi\Big(r\phi-r^2\phi'\Big)u^6\,dr+\frac{1}{2}|u'(\pi)|^2\phi(\pi).\tag{2.30}$$

恒等式 (2.30) 的作用有类于 Pohozaev 恒等式，但强于 Pohozaev 恒等式的结论. 令

$$\lambda\phi'+\frac{1}{4}\phi'''=0,$$

则 ϕ 可取为 $\phi(r)=\sin 2\sqrt{\lambda}\,r$. 由于 $0<\lambda\le 1/4$，有 $\phi(\pi)>0$. 从不等式

$$\sin\theta-\theta\cos\theta>0,\ \theta\in(0,\pi]$$

易见，当 $r\in(0,\pi]$ 时 (注意 $0<\lambda\le 1/4$)

$$r\phi-r^2\phi'=r\sin 2\sqrt{\lambda}\,r-2r^2\sqrt{\lambda}\cos 2\sqrt{\lambda}\,r>0,$$

这与恒等式 (2.30) 矛盾. □

2. **Schoen 的试验函数.**

命题 2.11 没有指出如何具体构造 φ，但它表明，$n=3$ 时，Brezis-Nirenberg 模型问题与 Ω 的整体几何特性有关. R. Schoen 在解决 Yamabe 问题时，将最佳 Sobolev 常数的极值函数与 Green 函数对接，成功地构造出了所需试验函数. 他的方法同样适用于这里.

让我们讨论一个稍许广泛的问题. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是有界区域，考虑下列问题

$$-\Delta u=u^5+a(x)u,\quad u>0\quad 在\ \Omega\ 中,\quad u|_{\partial\Omega}=0\tag{2.31}$$

我们假设算子 $-(\Delta+a)$ 强制，即存在常数 $\mu>0$，使得

$$\int_\Omega|\nabla v|^2-a|v|^2\ge\mu\int_\Omega|\nabla v|^2,\quad\forall\, v\in H_0^1(\Omega).\tag{2.32}$$

当 $a(x)=\lambda$ 为常数时，上述条件就是 $\lambda<\lambda_1$.

$-(\Delta+a)$ 的 Green 函数

设 $a\in L^\infty(\Omega)$ 满足条件 (2.32)，则对于任意 $x_0\in\Omega$，存在 $-(\Delta+a)$ 的 Green 函数 $\Gamma\in C^{2,\beta}(\overline{\Omega}\setminus\{x_0\})$ $(0<\beta<1)$，满足

$$-(\Delta+a)\Gamma=4\pi\delta_{x_0}\quad 在\ \mathcal{D}'(\Omega)\ 中,\quad \Gamma|_{\partial\Omega}=0, \tag{2.33}$$

并且在 x_0 点附近有渐近展式

$$\Gamma=r^{-1}+A+\alpha(x),\quad \alpha=O(r^\beta). \tag{2.34}$$

这里 $r=|x-x_0|$，A 是常数，$\alpha\in C^\beta(\overline{\Omega})$.

按如下步骤构造 Green 函数. 在 $n=3$ 时，$-\Delta r^{-1}=4\pi\delta_{x_0}$，令 $\Gamma\triangleq r^{-1}+H$，则 Γ 满足 (2.33) 及 (2.34). 这里，H 是如下边值问题的唯一 (强) 解：

$$-(\Delta+a)H=ar^{-1}\quad 在\ \Omega\ 中,\quad H+r^{-1}=0\quad 在\ \partial\Omega\ 上.$$

由于 $ar^{-1}\in L^{3-\varepsilon}(\Omega)$，$\varepsilon>0$ 充分小，由 L^p 估计，$H\in W^{2,3-\varepsilon}(\Omega)$，再由 Sobolev 嵌入定理，$H\in C^\beta(\overline{\Omega})$，由 Schauder 估计，$H\in C^{2,\beta}(\overline{\Omega}\setminus\{x_0\})$.

定理 2.14 *设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是有界光滑区域，$a\in L^\infty(\Omega)$. 如果*

(α) $-(\Delta+a)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上强制;

(β) 存在 $x_0\in\Omega$ 及 x_0 的某个邻域 B，使得在 B 上 $a(x)\geq 0$;

(γ) $-(\Delta+a)$ 在 x_0 点的 Green 函数 Γ 的展式 (2.34) 中 $A>0$;

则问题 (2.31) 有解.

注记 2.6 若 $\Omega=B_R\subset\mathbb{R}^3$，则 $-(\Delta+\lambda)$ 在原点的 Green 函数为

$$\Gamma=\frac{\cos\sqrt{\lambda}r}{r}-\cot\sqrt{\lambda}R\frac{\sin\sqrt{\lambda}r}{r},$$

我们有 $A=-\sqrt{\lambda}\cot\sqrt{\lambda}R$，因而 $A>0$ 当且仅当 $\lambda\in(\lambda_1/4,\lambda_1)$. 由定理 2.14 再次证得定理 2.12.

注记 2.7 若紧致 Riemann 流形 (M,g) 的维数 $n=3,4,5$ 或 (M,g) 共形平坦，则共形 Laplace 算子 $\square$ 在某点的 Green 展式如 (2.34)，R. Schoen 基本上证明：$A>0$ 除非 (M,g) 共形等价于标准球面——一种广义正质量定理（参见定理 7.20）. 藉此 R. Schoen 能够完成 T. Aubin 剩余下的 Yamabe 猜想.

Schoen 的试验函数

为完成定理 2.14 的证明，仍然是寻找一个试验函数 u_ε，使得 Yamabe 商

$$Q_a(u_\varepsilon) \triangleq \frac{\int |\nabla u_\varepsilon|^2 - a|u_\varepsilon|^2}{\|u_\varepsilon\|_6^2} < S. \tag{2.35}$$

注意，在 $-(\Delta + a)$ 强制的条件下，Aubin 型判据仍然成立（见 p. 79 注记 3.1）. 在构造试验函数时，第一个要素仍是最佳 Sobolev 不等式的极值函数，我们取

$$\phi_\varepsilon(x) = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + |x|^2}\right)^{1/2},$$

则 $S\|\phi_\varepsilon\|_6^2 = \|\nabla\phi_\varepsilon\|_2^2$. 我们注意 ϕ_ε 满足

$$-\Delta\phi_\varepsilon = 3\phi_\varepsilon^5 \quad 在\ \mathbb{R}^3\ 中. \tag{2.36}$$

由分部积分得 $\|\nabla\phi_\varepsilon\|_2^2 = 3\|\phi_\varepsilon\|_6^6$，因此，我们有

$$\|\phi_\varepsilon\|_6^4 = 3^{-1}S. \tag{2.37}$$

构造试验函数的另一要素是 $-(\Delta + a)$ 的 Green 函数. 设 $-(\Delta + a)$ 在某点，不妨设是原点 $o \in B \subset \Omega$ 的 Green 函数有渐近展式 (2.34)，取 $\delta > 0$ 充分小，使得 $B_\delta \subset B$. 令 $\eta \in C_0^\infty(\Omega; [0,1])$ 是光滑截断函数，满足

$$\eta(x) = 1,\ x \in B_\delta; \quad \eta(x) = 0,\ x \in M \setminus B_{2\delta}. \tag{2.38}$$

取 $0 < \varepsilon \ll \delta$，Schoen 的试验函数定义为

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} \phi_\varepsilon(x), & x \in B_\delta, \\ \varepsilon_0\big(\Gamma(x) - \eta(x)\alpha(x)\big), & x \in B_{2\delta} - B_\delta \\ \varepsilon_0\,\Gamma(x), & x \in \Omega - B_{2\delta}. \end{cases} \tag{2.39}$$

这里 Γ, A, α 一如展式 (2.34)，$\varepsilon_0 > 0$ 是待定常数，我们取其使得

$$\varepsilon_0\Big(\frac{1}{\delta} + A\Big) = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \delta^2}\right)^{1/2}, \tag{2.40}$$

这样 u_ε 在 $|x| = \delta$ 处连续，故是 Lipschitz 函数，因此 $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$.

定理 2.14 的证明 记 $E(u) = \displaystyle\int \Big\{|\nabla u|^2 - a|u|^2\Big\}$. 在定理 2.14 的条件下，我们断言

$$E(u_\varepsilon) \le S\|u_\varepsilon\|_6^2 - 4\pi A\varepsilon_0^2 + c\delta^\beta\varepsilon_0^2, \tag{2.41}$$

其中 $c>0$ 是某个常数，$0<\beta<1$. 因 $A>0$，而 $0<\varepsilon_0\ll\delta$，取 $\delta>0$ 充分小，便有 $Q_a(u_\varepsilon)<S$. 根据 Aubin 型判据——引理 2.7，问题 (2.31) 有解.

不等式 (2.41) 的证明. 为书写方便，简记 $u_\varepsilon=u$. 我们有

$$\int_{\Omega\setminus B_\delta}\left\{|\nabla u|^2-au^2\right\}=\int_{\Omega\setminus B_\delta}\varepsilon_0^2\left\{|\nabla\Gamma|^2-a\Gamma^2\right\}+\varepsilon_0^2 I,$$

其中（注意 $\operatorname{sppt}\eta\subset B_{2\delta}$）

$$I=\int_{B_{2\delta}\setminus B_\delta}\left\{|\nabla(\eta\alpha)|^2-2\nabla\Gamma\cdot\nabla(\eta\alpha)-a\big(\eta^2\alpha^2-2\eta\alpha\Gamma\big)\right\}.$$

由于 $\alpha\in C^\beta$，我们有 $\alpha=O(r^\beta)$，$\nabla\alpha=O(r^{\beta-1})$，故 $|\nabla(\eta\alpha)|\le Cr^{\beta-1}$. 又 $\nabla\Gamma=O(r^{-2})$. 因此 I 中被被积函数属于 $O(r^{\beta-3})$，故 $|I|\le c\delta^\beta$. 这样

$$\int\limits_{\Omega\setminus B_\delta}\left\{|\nabla u|^2-au^2\right\}\le\int\limits_{\Omega\setminus B_\delta}\varepsilon_0^2\left\{|\nabla\Gamma|^2-a\Gamma^2\right\}+c\delta^\beta\varepsilon_0^2.$$

因 Γ 在 $\Omega\setminus\{x_0\}$ 上满足 $\Delta\Gamma+a\Gamma=0$，由分部积分得

$$\int_{\Omega\setminus B_\delta}\left(|\nabla\Gamma|^2-a\Gamma^2\right)=-\int_{\partial B_\delta}\Gamma(\partial_r\Gamma)\,\mathrm{d}s,$$

从而

$$\int_{\Omega\setminus B_\delta}\left\{|\nabla u|^2-a|u|^2\right\}\le-\varepsilon_0^2\int_{\partial B_\delta}\Gamma(\partial_r\Gamma)\,\mathrm{d}s+c\delta^\beta\varepsilon_0^2. \tag{2.42}$$

另一方面，在 B_δ 上，由于 $a\ge0$，$u=\phi_\varepsilon$，故

$$\int_{B_\delta}\left\{|\nabla u|^2-a|u|^2\right\}\le\int_{B_\delta}|\nabla\phi_\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x.$$

根据 (2.36)，利用分部积分得

$$\int_{B_\delta}|\nabla\phi_\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x=3\int_{B_\delta}|\phi_\varepsilon|^6\,\mathrm{d}x+\int_{\partial B_\delta}\phi_\varepsilon(\partial_r\phi_\varepsilon)\,\mathrm{d}s.$$

现在对上式右端第一个积分进行估计，利用等式 (2.37)，我们有

$$\begin{aligned}\int_{B_\delta}|\phi_\varepsilon|^6\,\mathrm{d}x&=\|\phi_\varepsilon\|_{6,B_\delta}^4\|\phi_\varepsilon\|_{6,B_\delta}^2\\&\le\|\phi_\varepsilon\|_6^4\|u\|_6^2=3^{-1}S\|u\|_6^2.\end{aligned}$$

所以

$$\int_{B_\delta} \left\{ |\nabla u|^2 - a|u|^2 \right\} \leq S\|u\|_6^2 + \int_{\partial B_\delta} \phi_\varepsilon (\partial_r \phi_\varepsilon) \mathrm{d}s \tag{2.43}$$

综合 (2.42) 及 (2.43) 得

$$E(u) \leq S\|u\|_6^2 + c\delta^\beta \varepsilon_0^2 + \int_{\partial B_\delta} \left\{ \phi_\varepsilon(\partial_r \phi_\varepsilon) - \varepsilon_0^2 \Gamma(\partial_r \Gamma) \right\} \mathrm{d}s. \tag{2.44}$$

现在对 (2.44) 右端边界积分作估计. 在 $|x| = \delta$ 处有

$$\varepsilon_0^2 \Gamma(\partial_r \Gamma) = -\varepsilon_0^2 \Big(\delta^{-3} + A\delta^{-2} + O(\delta^{-1}) \Big), \tag{2.45}$$

由关系 (2.40) 得

$$\varepsilon_0^2 \phi_\varepsilon (\partial_r \phi_\varepsilon) = -\varepsilon_0^2 \Big(\delta^{-3} + 2A\delta^{-2} + O(\delta^{-1}) \Big). \tag{2.46}$$

将 (2.45) 与 (2.46)两式相减，其间主项 δ^{-3} 被抵消，因此（对 $\delta > 0$ 适当校

$$\int_{\partial B_\delta} \left\{ \phi_\varepsilon(\partial_r \phi_\varepsilon) - \varepsilon_0^2 \Gamma(\partial_r \Gamma) \right\} \mathrm{d}s \leq -4\pi A \varepsilon_0^2 + c\delta \varepsilon_0^2,$$

故由上式及 (2.44) 得

$$E(u) \leq S\|u\|_6^2 - 4\pi A \varepsilon_0^2 + c\delta^\beta \varepsilon_0^2,$$

此即 (2.41). 注意到 $0 < \varepsilon_0 \ll \delta$，取 $\delta > 0$ 充分小，便得 $Q_a(u_\varepsilon) = Q(u) < S$，定理 2.14 证毕. □

第三节　若干相关问题

一、带余项的最佳 Sobolev 不等式

对于 $n \geq 3$，及某些 $q \in (1, N)$，最佳 Sobolev 不等式 $S\|u\|_N^2 \leq \|\nabla\|_2^2$ 可以带有一个余项 $\|u\|_q^2$，即

$$\|\nabla u\|_2^2 \geq S\|u\|_N^2 + \lambda^* \|u\|_q^2, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega),$$

我们称之为 带余项的最佳 Sobolev 不等式（sharp Sobolev inequalty），其中 $\lambda^* > 0$ 是能使上式成立的极大常数.

首先，当 $n = 3$ 时，我们有

定理 2.15 (Brezis-Nirenberg [52]) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为有界区域，则存在只依赖于 Ω 的，极大的常数 $\lambda^* \in (0, \lambda_1)$，使得

$$\|\nabla u\|_2^2 \geq S\|u\|_6^2 + \lambda^*\|u\|_2^2, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega), \tag{2.47}$$

当 Ω 是球时，这个最佳值是 $\lambda^* = \pi^2/(4R^2)$. 这里 S 是最佳 Sobolev 常数.

证明 对于 $u \in H_0^1(\Omega)$，令 u^* 是 u 的球面对称重排，根据定理 1.36，我们有 $u^* \in H_0^1(\Omega^*)$ 且

$$\|\nabla u^*\|_2^2 \leq \|\nabla u\|_2^2, \quad \|u^*\|_p^2 = \|u\|_p^2 \; (\, 2 \leq p \leq N \,). \tag{2.48}$$

此外，记 $\lambda_1(\Omega^*)$ 为 $-\Delta$ 在 $H_0^1(\Omega^*)$ 上的第一特征值，根据定理 2.13 有

$$\|\nabla u^*\|_2^2 \geq S\|u^*\|_6^2 + \tfrac{1}{4}\lambda_1(\Omega^*)\|u^*\|_2^2, \tag{2.49}$$

这是因为如若不然，而对某个 u 成立反向严格不等式，将导致问题 (2.1) 对于 $\lambda = \frac{1}{4}\lambda_1(\Omega^*)$ 有解. 这与定理 2.13 结论矛盾. 结合 (2.48) 与 (2.49) 得

$$\|\nabla u\|_2^2 \geq S\|u\|_6^2 + \lambda^*\|u\|_2^2, \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

其中 $\lambda^* = \lambda^*(\Omega)$ 是使上式成立的最大常数，$\lambda^* \geq \frac{1}{4}\lambda_1(\Omega^*)$. 又由第一特征值的性质，必有 $\lambda^* < \lambda_1$. □

定理 2.15 及其证明说，对于 $\mathbb{R}^3$ 中的有界区域 Ω，存在一个只依赖于 Ω 的常数 $\lambda^* \in [\lambda_1(\Omega^*)/4,\, \lambda_1)$ 满足

$$\lambda > \lambda^* \Longrightarrow S_\lambda < S; \qquad \lambda \leq \lambda^* \Longrightarrow S_\lambda = S.$$

这样，对于 $\lambda \in (\lambda^*,\, \lambda_1)$，问题 (2.1) 有解. 当 $\Omega = B_R$ 是一球时，$\lambda^* = \pi/(4R^2)$.

当 $n \geq 4$ 时，(2.47) 不再成立，但定理 2.15 有如下推广.

定理 2.16 设 Ω 是 $n \geq 3$ 维有界区域，则对于任意 $q \in (1, n/(n-2)$ 成立

$$\|\nabla u\|_2^2 \geq S\|u\|_{2^*}^2 + \lambda_q\|u\|_q^2,$$

其中 λ_q 是只依赖于 q 及 Ω 的正数.

证明 利用函数的对称重排技术，我们只须就 $\Omega = B$ 为球形区域，而 u 是径向对称函数证明定理（参见定理 2.15 的证明）. 设 $\Omega = B_R$，并令

$$S_{q,\lambda} = \inf_{u \in \Sigma_r} \{ \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_q^2 \}, \tag{2.50}$$

其中

$$\Sigma_r = \{u \in H_0^1(B) : \|u\|_N = 1, \ u \text{ 径向对称}\}.$$

则定理 2.50 要证明的是，存在某个 $\lambda > 0$ 使得 $S_{q,\lambda} = S$ (总有 $S_{q,\lambda} \le S$). 设若定理结论不成立，将有

$$S_{q,\lambda} < S, \quad \forall \lambda > 0,$$

这时，与引理 2.7 类似，可以证明，(2.50) 式中下确界可被某个非负 (径向) 函数达到，拉伸 Lagrange 乘数，便得到如下问题的一个解：

$$-\Delta u = u^p + \lambda' u^{q-1}, \ \ u > 0 \quad \text{在 } B \text{ 中}, \quad u|_{\partial B} = 0,$$

其中 $\lambda' = \lambda \|u\|_q^{2-q}$. 结合 Pohozaev 恒等式，我们有

$$\lambda\Big(\frac{n}{q} - \frac{n-2}{2}\Big)\|u\|_q^2 = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (x \cdot \nu)\Big(\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big)^2 \tag{2.51}$$

这里我们利用了关系 $\lambda' = \lambda \|u\|_q^{2-q}$. 在 ∂B 上 $x \cdot \nu = R$，存在常数 $A > 0$ 使得

$$\begin{aligned}\int_{\partial B}\Big(\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big)^2 &\ge A\Big(\int_{\partial B}\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big)^2 \\ &= A\Big(\int_B -\Delta u\Big)^2 = A\Big(\int_B |\Delta u|\Big)^2.\end{aligned} \tag{2.52}$$

另一方面，根据下文的径向引理 2.17，我们有

$$|u(x)| \le \frac{A}{|x|^{n-2}} \int_B |\Delta u|, \quad \forall x \in B.$$

由此，当 $q(n-2) < n$ 时，对上式 q 次积分得

$$\|u\|_q \le A' \int_B |\Delta u| \tag{2.53}$$

由不等式 (2.51)，(2.52) 及 (2.53) 得 $\lambda > \lambda_0 > 0$，与假设矛盾. □

引理 2.17 (径向引理)　设 $u \in C^2(B_R) \cap C_0(\overline{B_R})$ 是径向对称函数，则

$$(\alpha)\qquad |u(x)| \le \frac{A_n}{|x|^{n-2}} \int_{B_R} |\Delta u|, \quad \forall\, x \in B_R,$$

$$(\beta)\qquad |u(x)| \le \frac{B_n}{|x|^{(n-2)/2}} \left(\int_{B_R} |\nabla u|^2 \right)^{1/2}, \ \forall\, x \in B_R,$$

其中 A_n, B_n 是只依赖于 n 的常数.

证明　我们有

$$u_\rho(\rho) = \frac{1}{\rho^{n-1}} \int_0^\rho \left(r^{n-1} u_r\right)_r \mathrm{d}r = \frac{1}{\rho^{n-1}} \int_0^\rho (\Delta u) r^{n-1} \mathrm{d}r.$$

将上式关于 ρ 在 $[|x|, R]$ 上积分，可得

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \frac{1}{\omega_{n-1}} \left| \int_{|x|}^R \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^{n-1}} \left\{ \int_0^\rho \int_{\mathbb{S}^1} \Delta u \mathrm{d}\omega \mathrm{d}r \right\} \right| \\ &\le \frac{A}{|x|^{n-2}} \int_\Omega |\Delta u|, \qquad \forall\, x \in \Omega. \end{aligned}$$

这就完成了 (α) 的证明. 类似地，我们有

$$|u(x)| \le \int_{|x|}^R |u_r| \mathrm{d}r \le \left(\int_{|x|}^R |u_r|^2 r^{n-1} \mathrm{d}r \right)^{1/2} \left(\int_{|x|}^R r^{1-n} \mathrm{d}r \right)^{1/2},$$

注意到 $\int_{|x|}^\infty r^{1-n} \mathrm{d}r = (n-2)|x|^{2-n}$，由此不难完成引理结论 (β) 的证明. □

二、对称函数的 Sobolev 嵌入

对于径向对称函数而言，由引理 2.17 知，它的奇性集中在原点，消除奇性的影响，便可改善 Sobolev 嵌入，便可用变分法讨论超临界指标椭圆方程.

1. 球域上对称函数的加权 Sobolev 嵌入.

在 Ni [161] 中，倪维明讨论了一个有趣的边值问题

$$-\Delta u = K(x) u^{p-1}, \ \ u > 0 \ \text{在 } B \text{ 中}, \quad u|_{\partial B} = 0, \tag{2.54}$$

其中 $p \ge N$，B 是 $n \ge 3$ 维单位球，$K \in C^\alpha(\bar{B})$ 是径向对称的非负函数. 满足 $K(0) = 0$. 典型的情形是 $K(x) = |x|^\alpha$.

注意，对于一般的 K，问题 (2.54) 可能无解. 例如，当 $x \cdot \nabla K < 0$ 时，根据 Pohozaev 恒等式，问题无解. Ni [161] 证明

定理 2.18 (Ni [161]) 设 $K(x)=|x|^\alpha$, $\alpha>0$, 则当 $p\in(1,\frac{2(n+\alpha)}{n-2})$ 时, 问题 (2.54) 有解.

定理 2.18 是下面讲到的嵌入定理, 命题 2.19 的简单应用. 记

$$\mathring{H}_r^1(B)=\{u\in H_0^1(B): u \text{ 径向对称}\}.$$

命题 2.19 当 $p\in(1,\frac{2(n+\alpha)}{n-2})$ 时, 嵌入 $\mathring{H}_r^1(B)\hookrightarrow L^p(B,|x|^\alpha\mathrm{d}x)$ 是紧的.

证明 根据径向引理, 对于任意 $u\in\mathring{H}_r^1(B)$

$$|u(x)|\le C_n|x|^{\frac{2-n}{2}}\|\nabla u\|_2,\quad \text{a.e. } x\in B,$$

因而,

$$\int_B|x|^\alpha|u|^p\mathrm{d}x\le C\|\nabla u\|_2^p\int_B|x|^{\frac{(2-n)p+2\alpha}{2}}\mathrm{d}x,$$

上式右端积分当 $\frac{(2-n)p+2\alpha}{2}<-n$, 即 $p<\frac{2(n+\alpha)}{n-2}$ 时可积, 故此时

$$\|u\|_{L^p(B,\mathrm{d}\mu)}\le C\|\nabla u\|_2,\quad (\mathrm{d}\mu=|x|^\alpha\mathrm{d}x)$$

即嵌入 $\mathring{H}_r^1(B)\hookrightarrow L^p(B,\mathrm{d}\mu)$ 连续. 因当 $\frac{2(n+\alpha)}{n-2}>q>p$ 时, $L^q(B,\mathrm{d}\mu)\hookrightarrow L^p(B,\mathrm{d}\mu)$, 这就意味着嵌入 $\mathring{H}_r^1(B)\hookrightarrow L^p(B,\mathrm{d}\mu)$ 紧. □

注记 2.8 在命题 2.19 中, 若将 $|x|^\alpha$ 换为非负 C^α 径向对称函数 K, $K(0)=0$, 结论仍成立. 如果 K 仅是 $\bar{B}$ 上的连续函数, 且 $K(0)=0$, 则命题 2.19 对于临界指标 $p=N$ 也成立 (见王-邱 [242]). 对于部分对称的区域 Ω, 也有类似结论 (见 Wang [206] 及 Zhang-Zhao [215]).

2. 部分对称函数的 Sobolev 嵌入.

我们知道, 对称性能够改善 Sobolev 嵌入. 通常描述区域对称性的方法是用等距变换群作用下的不变性来描述, 参见 P.L. Lions [138] 及 Hebey-Vaugon [115], 也见本书第八章第三节. 这里我们讨论一种特殊情形.

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^m$ 是有界区域, $k\ge0$, $m\ge2$. Ω 中的点写为 (x,y), $x\in\mathbb{R}^k$, $y\in\mathbb{R}^m$. 用垂直于 x 空间的超平面 $x+\mathbb{R}^m$ 去截 Ω, 得一环域

$$A_x=\{(x,y): y\in\mathbb{R}^m,\ R_1^x\le|y|\le R_2^x\},\tag{2.55a}$$

其中 R_1^x, R_2^x 连续地依赖于光滑区域 $D \subset \mathbb{R}^k$ 中的 x，且 $a \le R_1^x \le R_2^x \le b$；常数 a, b 满足 $0 < a < b$. 在这些记号下，Ω 可表示为

$$\Omega = \bigcup_{x \in D} A_x. \tag{2.55b}$$

这样的对称区域是“轴”对称区域，包含许多我们感兴趣的区域，如环状区域 A (annulus)，桶状区域 $D \times A$，环面 $\mathbb{T}^2$ 所包含的区域等.

A_x 上的函数 $f(y)$ 称为径向对称的，如果它仅与 $r = |y|$ 有关，简记为 $f(y) = f(r)$. 记

$$\mathring{W}_s^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) : u(x,y) = u(x,r) \right\}.$$

令 $s^* = \frac{(k+1)p}{k+1-p}$ 如果 $k > p-1$；$s^* = \infty$ 如果 $k \le p-1$. 我们有

命题 2.20 设 Ω 满足 (2.55)，则对于 $q \in [1, s^*)$，嵌入 $\mathring{W}_s^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ 是连续的、紧致的. 如果 $s^* \ne \infty$，则嵌入 $\mathring{W}_s^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{s^*}(\Omega)$ 是连续的.

证明 记 $k+1$ 维区域

$$\Omega' = \{(x,r) : R_1^x < r < R_2^x,\ x \in D\}.$$

设 u 是 Ω 上 q 次可积的对称函数，则

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(x,y)|^q \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_D \mathrm{d}x \int_{A_x} |u(x,y)|^q \mathrm{d}y \\ &= \omega_{m-1} \int \mathrm{d}x \int_{R_1^x}^{R_2^x} |u(x,r)|^q r^{m-1} \mathrm{d}r \\ &\le b^{m-1}\omega_{m-1} \int_{\Omega'} |u(x,r)|^q \mathrm{d}x\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

类似地，对于 $u \in \mathring{W}_s^{1,p}(\Omega)$，我们有（$D$, ∇ 分别表示 Ω' 及 Ω 上的梯度）

$$\int_{\Omega'} |Du|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}r \le a^{1-m}\omega_{m-1}^{-1} \int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

故引理 2.20 由一般 Sobolev 嵌入 $W^{1,p}(\Omega') \hookrightarrow L^q(\Omega')$ 的结论获证. □

注记 2.9 对于弯管区域 Ω，命题 2.20 意味着各种各样的存在性定理. 例如，当 $q\in(1,\,2(k+1)/(k-1))$ 时，边值问题

$$-\Delta u=u^{q-1}+\lambda u,\ \ u>0\ \text{ 在 }\Omega\text{ 中},\quad u|_{\partial\Omega}=0,$$

对所有 $\lambda\in(-\infty,\,\lambda_1)$，有对称解 $u\in\mathring{W}_s^{1,2}(\Omega)$.

三、区域拓扑的影响

悉知，当 $\lambda\le 0$ 时，Brezis-Nirenberg 模型问题对于星形区域 Ω 无解；但对于环状区域，却是有解的. 这说明，区域的拓扑可能影响问题解的存在性.

1. 一个存在性定理.

设有界区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 满足条件：存在常数 $0<R_1<R_2<\infty$ 使得

$$\Omega\supset\{x\in\mathbb{R}^n:\,R_1\le|x|\le R_2\},\tag{2.56}$$

$$\Omega\not\supset\{x\in\mathbb{R}^n:\,|x|\le R_1\}.\tag{2.57}$$

现讨论 Brezis-Nirenberg 模型问题在 $\lambda\le 0$ 的情形，令 $\mu=-\lambda$，考虑

$$-\Delta u+\mu u=u^{N-1},\quad u>0\quad \text{在 }\Omega\text{ 中},\quad u|_{\partial\Omega}=0\tag{2.58}$$

我们的结论是

定理 2.21 *设 $\mu\ge 0$ 若 $n\ge 4$; $\mu=0$ 若 $n=3$. 则只要 R_2/R_1 充分大，问题 (2.58) 就有解.*

以下论证用反证法，始终 **假设问题 (2.58) 无解**. 现引进若干记号. 令

$$M=\big\{u\in H_0^1(\Omega):\,\|\nabla u\|_2^2+\mu\|u\|_2^2=1\big\},$$
$$M^+=\{u\in M:\,u\ge 0\}.$$

显然 M 是光滑的 Hilbert 流形. 我们在 M 上研究泛函

$$J(u)=\frac{1}{\left(\int|u|^N\right)^{2/N}},\qquad u\in M.$$

2. 关于泛函 J 的若干事实.

1° J 是 M 上的 C^{2-0} 泛函，且对于 $u \in M^+$，

$$J'(u) = 2J(u)\{u - J^{N/2}(u)L^{-1}(u^{N-1})\},$$

其中 $L = -\Delta + \mu$. 故 $J'(u) = 0$ 当且仅当 $v = [J^{n/(n+2)}(u)]u$ 是 (2.1) 的解.

2° 由极大值原理知，M^+ 在 J 的下降流下保持不变，即初值问题

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -J'(u), \quad u|_{t=0} \in M^+$$

的解 $u(t) \in M^+$ (关于流形上的下降流，见张恭庆 [254]).

3° 由 Struwe 的全局紧性结论——定理 10.12，对于 $c \in I \triangleq (S, 2^{2/n}S)$，泛函 J 满足 $(\mathrm{PS})_c$ 条件. 结合事实 2° 便知，对于 $[b_1, b_2] \subset I$，$J_+^{b_2}$ 是 $J_+^{b_1}$ 的强形变收缩核. 这里 $J_+^b = \{u \in M_+ : J(u) \leq b\}$. 于是

引理 2.22 假设问题 (2.58) 无解，则对于任意 $[b_1, b_2] \subset (S, 2^{2/n}S)$，水平集 $J_+^{b_1}$ 与水平集 $J_+^{b_2}$ 同伦.

4° 记

$$F(u) = \int x|\nabla u|^2, \quad u \in M.$$

引理 2.23 对于 Ω 的任一紧邻域 V，存在 $\varepsilon > 0$，使得 $F(J^{S+\varepsilon}) \subset V$.

证明 设 $\{u_k\} \subset J^{S+1/k}$，应用凝聚紧性原理，根据定理 10.11，存在一子列及 $x_0 \in \overline{\Omega}$ 使得

$$|u_k|^N \xrightarrow{\text{tight}} (1/S)\delta_{x_0}, \quad |\nabla u_k|^2 \xrightarrow{\text{tight}} \delta_{x_0},$$

当 $k \to \infty$ 时，$F(u_k) \to x_0$，引理由此证明. □

3. 试验函数及相关估计.

在问题 (2.58) 中，若将 Ω 换作 Ω/α 时，则仅仅是将 μ 换作 $\alpha^{(n+2)/2}\mu$，问题不变，故不妨设

$$R_1 = R^{-1} < 1 < R = R_2,$$

这样单位球面 $\mathbb{S}^{n-1} \subset \Omega$. 对于 $\sigma \in \mathbb{S}^{n-1}$，$0 \le t < 1$ 及整数 $k \ge 1$，在 $\mathbb{R}^n$ 上定义函数

$$\psi_{k,t}^{\sigma} = \left(\varepsilon_{k,t}^2 + |x - t\sigma|^2\right)^{\frac{2-n}{2}}, \quad \varepsilon_{k,t} = \frac{1-t}{\sqrt{k}}.$$

注意 $\psi_{k,t}^{\sigma}$ 及 ψ（由 (2.17) 定义）是最佳 Sobolev 常数 S 的极值函数，满足

$$\|\nabla \psi_{k,t}^{\sigma}\|_2^2 = \|\nabla \psi\|_2^2 (\varepsilon_{k,t})^{2-n}, \quad \|\psi_{k,t}^{\sigma}\|_N^2 = \|\psi\|_N^2 (\varepsilon_{k,t})^{2-n}. \tag{2.59}$$

取径向对称函数 φ, $\varphi_k \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n; [0,1])$ 分别使得

$$\varphi(x) = 0,\ |x| \le \tfrac{1}{4}; \quad \varphi(x) = 1,\ \tfrac{1}{2} < |x| < \tfrac{3}{2}; \quad \varphi(x) = 0,\ |x| \ge 2;$$

以及

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \varphi(kx), & 0 \le |x| \le \frac{1}{k}, \\ 1, & \frac{1}{k} < |x| < k, \\ \varphi(\frac{1}{k}x), & k \le |x| < \infty. \end{cases}$$

令 $u_{k,t}^{\sigma} = \varphi_k \cdot \psi_{k,t}^{\sigma}$，并令

$$v_{k,t}^{\sigma} = \frac{u_{k,t}^{\sigma}}{\left(\|\nabla u_{k,t}^{\sigma}\|_2^2 + \mu \|u_{k,t}^{\sigma}\|_2^2\right)^{1/2}}.$$

我们有：

引理 2.24 (α) $\forall\, \delta > 0$, $\exists\, k_0 \ge 1$, 使当 $k \ge k_0$ 时, 关于 $t \in [0,1)$ 及 $\sigma \in \mathbb{S}^{n-1}$ 一致地有

$$J(v_{k,t}^{\sigma}) < S + \delta, \quad \forall\, \sigma \in \mathbb{S}^{n-1}, \forall\, t \in [0,\, 1); \tag{2.60}$$

(β) 对于固定的 k, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \eta \ge 0$, 使当 $\eta \le t < 1$ 时, 关于 $\sigma \in \mathbb{S}^{n-1}$ 一致地有

$$J(v_{k,t}^{\sigma}) < S + \varepsilon, \quad \forall\, \sigma \in \mathbb{S}^{n-1}, \forall\, k \ge 1, \tag{2.61}$$

$$|F(v_{k,t}^{\sigma}) - \sigma| < \varepsilon, \quad \forall\, \sigma \in \mathbb{S}^{n-1}, \forall\, k \ge 1. \tag{2.62}$$

证明 先证 (2.60) 及 (2.61). 我们有

$$J(v_{k,t}^{\sigma}) = \frac{\|\nabla u_{k,t}^{\sigma}\|_2^2 + \mu \|u_{k,t}^{\sigma}\|_2^2}{\|u_{k,t}^{\sigma}\|_N^2}. \tag{2.63}$$

我们断言，当 $k\to\infty$ 或 $t\to 1$ 时 (从而 $\varepsilon_{k,t}\to 0$)，一致地有如下估计

$$\left\|u_{k,t}^{\sigma}\right\|_2^2=o\big((\varepsilon_{k,t})^{2-n}\big), \tag{2.64}$$

$$\left\|\nabla u_{k,t}^{\sigma}\right\|_2^2=\|\nabla\psi\|_2^2\cdot(\varepsilon_{k,t})^{2-n}\big(1+o(1)\big), \tag{2.65}$$

$$\left\|u_{k,t}^{\sigma}\right\|_N^2=\|\psi\|_N^2\cdot(\varepsilon_{k,t})^{2-n}\big(1+o(1)\big). \tag{2.66}$$

将这些估计代入 (2.63)，并注意 $\|\nabla\psi\|_2^2=S\|\psi\|_N^2$，便可证得 (2.60) 及 (2.61).

验证 (2.64). 参照 (2.23) 及其证明可获证 (2.64).

验证 (2.65) 及 (2.66). 我们将证明

$$I\triangleq\int\left|\nabla(u_{k,t}^{\sigma}-\psi_{k,t}^{\sigma})\right|^2=o\big(\varepsilon_{k,t}^{2-n}\big). \tag{2.67}$$

这样，(2.65) 便由 (2.59) 及 (2.67) 获得. (2.66) 则由 (2.59), (2.67) 及 Sobolev 不等式获证.

为证 (2.67)，我们注意，$u_{k,t}^{\sigma}-\psi_{k,t}^{\sigma}=(\varphi_k-1)\psi_{k,t}^{\sigma}$，它的支集包含在 $\Omega_1\cup\Omega_2\triangleq\{|x|\le 1/k\}\cup\{k\le|x|\le 2k\}$，我们有

$$\begin{aligned}I&\le\int_{\Omega_1\cup\Omega_2}\Big\{|\nabla\psi_{k,t}^{\sigma}|^2+|\psi_{k,t}^{\sigma}\nabla\varphi_k|^2+2|\psi_{k,t}^{\sigma}\nabla\varphi_k|\cdot|\nabla\psi_{k,t}^{\sigma}|\Big\}\\&\triangleq I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

当 $x\in\Omega_1$ 时，$|\nabla\varphi_k|\le Ck$；用初等微积分可得 $|\psi_{k,t}^{\sigma}|^2\le Ck^{n-2}$；而 $|\nabla\psi_{k,t}^{\sigma}|^2=C|x-t\sigma|^2|\psi_{k,t}^{\sigma}|^N$. 故

$$I_{11}\triangleq\int_{\Omega_1}|\nabla\psi_{k,t}^{\sigma}|^2\le C\cdot k^n\left|B_{1/k}\right|=O(1),$$

$$I_{21}\triangleq\int_{\Omega_1}\left|\psi_{k,t}^{\sigma}\nabla\varphi_k\right|^2\le Ck^2\cdot k^{n-2}\left|B_{1/k}\right|=O(1).$$

在 Ω_2 上，$|\nabla\psi_{k,t}^{\sigma}|^2\le C\big(|x|-1\big)^{2(1-n)}\in L^1(\mathbb{R}^n)$，所以

$$I_{12}\triangleq\int_{\Omega_2}|\nabla\psi_{k,t}^{\sigma}|^2=O(1),$$

在 Ω_2 上，由于 $|\nabla\varphi_k|\le C/k$，由 (2.64)，

$$I_{22}\triangleq\int_{\Omega_2}\left|\psi_{k,t}^{\sigma}\nabla\varphi_k\right|^2=o\big((\varepsilon_{k,t})^{2-n}\big).$$

于是 $I_1 = I_{11} + I_{12} = o\big((\varepsilon_{k,t})^{2-n}\big)$, $I_2 = I_{21} + I_{22} = o\big((\varepsilon_{k,t})^{2-n}\big)$. 应用 Hölder 不等式得

$$I_3 \triangleq \int_{\Omega_1\cup\Omega_2} 2|\psi^\sigma_{k,t}\nabla\varphi_k|\cdot|\nabla\psi^\sigma_{k,t}| \le 2I_1^{1/2}I_2^{1/2} = o\big((\varepsilon_{k,t})^{2-n}\big).$$

故 $I = I_1 + I_2 + I_3 = o\big((\varepsilon_{k,t})^{2-n}\big)$.

验证 (2.62) 依 (2.64) 与 (2.65)，当 $t \to 1$ 时，$\|\nabla v^\sigma_{k,t}\|_2 \xrightarrow{1} 1$. 注意 $\operatorname{sppt} v^\sigma_{k,t} \subset \{|x| \le 2k\}$. 援引 (2.59) 与 (2.67)，对于固定的 k,

$$\begin{aligned}\big|F(v^\sigma_{k,t}) - \sigma\big| &\le \varepsilon\int|\nabla v^\sigma_{k,t}|^2 + \int_{|x-t\sigma|\ge\varepsilon}|x-t\sigma|\cdot|\nabla v^\sigma_{k,t}|^2\\ &= \varepsilon + Ck(\varepsilon^\sigma_{k,t})^{n-2}\int_{|x|\ge\varepsilon}|\nabla\psi^\sigma_{k,t}|^2\\ &\le \varepsilon + o(1).\end{aligned}$$

引理 2.24 证毕 □

4. **定理 2.21 的证明.**

用反证法，假定问题 (2.58) 无解. 取定 $\delta > 0$，使得 $S + \delta < 2^{2/n}S$. 设 $k_0 = k_0(\delta)$ 是依引理 2.24 之 (α) 所确定的整数. 记

$$w^\sigma_t \triangleq v^\sigma_{k_0,t}.$$

现假定 R 是如此之大，以至 $R \ge 4k_0$，那么 $w^\sigma_t \in M^+ \subset H^1_0(\Omega)$，且依引理 2.24 之 (α),

$$J(w^\sigma_t) < S + \delta, \quad \forall\, t \in [0,1),\ \forall\, \sigma \in \mathbb{S}^{n-1}. \tag{2.68}$$

设 V 是 Ω 的一个紧邻域，使得

$$\{x : |x| < R^{-1}\} \not\subset V. \tag{2.69}$$

应用引理 2.23，存在 $\varepsilon \in (0,\delta)$，使得

$$F(J^{S+\varepsilon}) \subset V. \tag{2.70}$$

现在分别定义映射 f 与 Θ 如下

$$f(\sigma) \triangleq w^\sigma_{t_0} = v^\sigma_{k_0,t_0}, \quad \Theta(\sigma) \triangleq F(f(\sigma)).$$

应用引理 2.24 的结论 (β)，存在 $t_0 \in (0,1)$，使得 f 与 Θ 分别满足

$$f(\sigma) \in J^{S+\varepsilon}, \qquad \forall\, \sigma \in \mathbb{S}^{n-1}, \tag{2.71}$$

$$|\Theta(\sigma) - \sigma| \le 1/2, \quad \forall\, \sigma \in \mathbb{S}^{n-1}. \tag{2.72}$$

由 (2.71)，$f \in C(\mathbb{S}^{n-1}; J_+^{S+\varepsilon})$；并且从 (2.69), (2.70), (2.72) 知

$$\big(\, f \text{ 不同伦于 } C(\mathbb{S}^{n-1}; J_+^{S+\varepsilon}) \text{ 中的常值映象} \,\big). \tag{2.73}$$

(参见陈先生 [219] 11 章：有限维球面间映象的同伦) 现在，定义映射 $H : [0, t_0] \to C(\Sigma; M^+)$ 如下

$$H(t)(\sigma) \triangleq w_t^\sigma = v_{k_0,t}^\sigma.$$

显然映射 H 连续且 $H(0) = w_0^\sigma$，$H(t_0) = f$. 根据 k_0 的选龋由 (2.68) 有

$$H \in C\big([0, t_0] \times \mathbb{S}^{n-1}; J_+^{S+\delta}\big).$$

注意到 $w_0^\sigma = v_{k_0,0}^\sigma$ 不依赖于 σ，从而又有

$$\big(\, f \text{ 同伦于 } C(\mathbb{S}^{n-1}; J_+^{S+\delta}) \text{ 中的常值映象} \,\big). \tag{2.74}$$

(2.73) 式与 (2.74) 式表明，水平集 $J_+^{S+\varepsilon}$ 与水平集 $J_+^{S+\delta}$ 的伦形不同. 这与引理 2.22 矛盾，因而问题 (2.58) 无解的假设不成立. □

注记 2.10　定理 2.21 在 $n \ge 3$, $\mu = 0$ 的结论属于 Coron [81]. $n \ge 4$, $\mu \ge 0$ 的结论由王文智等 [241] 得到. 显然 $n = 3$ 时，对于 $\mu > 0$ 充分小，定理 2.21 的结论仍成立.

注记 2.11　Bahri-Coron [31] 证明：设 Ω 是 $n \ge 3$ 维有界区域，如果存在正整数 d 使得 Ω 的 d 维同调群 $H_d(\Omega, \mathbb{Z}_2) \ne 0$，那么问题 (2.58) 对于 $\mu = 0$ 有解.

注记 2.12　当 $n = 3$ 时，条件 $H_d(\Omega, \mathbb{Z}_2) \ne 0\ (d > 0)$ 等价于 Ω 不可缩. 所以 Coron [81] 曾猜想：如果 Ω 不可缩，则问题 (2.58) 对于 $\mu = 0$ 有解. 另一方面，Dancer [84] 构造了一个例子，表明不可缩并不是问题存在解的必要条件.

第三章 一般临界非线性椭圆方程

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ 是有界区域. 记 $N = 2n/(n-2)$. 由前一章知道, 由于 Pohozaev 障碍, 边值问题

$$-\Delta u = u^{N-1}, \ u > 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{P}$$

当 Ω 为星形区域时无解. 从技术层面看, 是因为其变分泛函——Sobolev 商

$$Q(u) = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_N^2}, \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

涉及非紧致的临界 Sobolev 嵌入 $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^N(\Omega)$; 或单纯从泛函分析的角度看, 是因为泛函 $Q(u)$ 的 (局部) 对称性所致, $Q(u)$ 在非紧致群——伸缩变换群

$$\tau_\sigma \circ u(\cdot) \triangleq u(\sigma \cdot)$$

作用下不变. 这些事实导致泛函 Q 不满足 (P.S.) 条件.

对 Brezis-Nirenberg 模型问题的研究表明, 在方程 (P) 的右端添加一个线性摄动, 可以改变这种境况. 部分原因或许是这样的摄动打破了 Q 的对称性.

一个自然的问题是, 如果在 (P) 的右端添加其他摄动, 情况会怎样?

Brezis-Nirenberg [52] 考虑了摄动 $f(x,u)$, 它在 $u \to \infty$ 时比 u^{N-1} 低阶, 在 $u \to 0$ 时呈线性或超线性. 这里, 我们讨论更广泛一些的问题:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= K(x)u^{N-1} + f(x,u) && \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u &> 0 && \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u &= 0 && \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 K 是严格正函数, f 是如同 Brezis-Nirenberg [52] 中的摄动, 这些将在稍后进一步加以明确.

需要指出的是，由于问题 (3.1) 中，非线性主项有因子 K，问题变得较为复杂，即便 $f=\lambda u$ 也不简单（见 Escobar [94]）. 原因在于涉及主项的估计须用最佳 Sobolev 不等式，这就需要一种精确. 只有当 K 表现得像一个常数时，我们才有结论.

基本假设 本章关于 K 及 f 作如下基本假设. 假定 K 满足

$$K \in C(\overline{\Omega}), \quad 0 < K_* \triangleq \min_{\overline{\Omega}} K \le \max_{\overline{\Omega}} K \triangleq K^*. \tag{K}$$

在讨论存在性时尚须对 K 进一步假设. 假定 $f(x,u)$ 可写为

$$f(x,u) = a(x)u + g(x,u), \tag{f_1}$$

其中 $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$，且关于 $x \in \overline{\Omega}$ 一致地有

$$g(x,u) = o(u), \qquad (u \to 0) \tag{f_2}$$

$$g(x,u) = o(u^{N-1}), \quad (u \to \infty) \tag{f_3}$$

而函数 $a(x)$ 满足

$$a \in L^\infty(\Omega) \text{ 且算子 } -(\Delta + a) \text{ 在 } H_0^1(\Omega) \text{ 上强制.} \tag{f_4}$$

注意，在 $f(x,u)=\lambda u$ 的情形，条件 (f_4) 即 $\lambda < \lambda_1$.

因为这些条件要反复提到，我们把它归总成一个条件——基本假设：

$$(K),\ (f_1)\text{—-}(f_4). \tag{H}$$

在基本假设 (H) 下，我们用变分法讨论问题 (3.1) 解的存在性. 问题 (3.1) 的（弱）解对应下列泛函 Φ 在 $H_0^1(\Omega)$ 的临界点，

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 - \int \left\{\frac{1}{N}K|u|^N - F(x,u)\right\}, \tag{3.2}$$

其中 $F(u)=\int_0^u f(x,t)\,\mathrm{d}t$. 在基本假设 (K)，(f_1)—-(f_4) 下，Φ 是 $H_0^1(\Omega)$ 上的 C^1 泛函. 正如上一章曾指出的一样，泛函 Φ 不可能满足全局的 (P.S.) 条件. 这就需要作出一系列精细的估计.

本章第一节是变分框架，主要是 Brezis-Nirenberg 判据. 第二节专论问题 (3.1) 解的存在性，高维 $n \ge 5$ 与低维 $n=4$ 和 $n=3$ 的情形有不同的结论. 第三节讨论多解性，提供两个实例，非线性特征值问题及 Ambrosetti-Prodi 问题.

第一节 变分方法

一、存在性的 Brezis-Nirenberg 判据

Brezis-Nirenberg [52] 运用山路引理得到问题 (3.1) 解的存在性的一个判据，是 Aubin 型判据的推广，是传统变分法的一个突破.

1. **判据.** 我们有

定理 3.1 (Brezis-Nirenberg [52]) *在基本假设 (H) 下，假定存在 $v_0 \in H_0^1(\Omega)$，$0 \not\equiv v_0 \geq 0$，使得*

$$\sup_{t\geq 0} \Phi(tv_0) < \frac{1}{n}(K^*)^{-\frac{n}{N}} S^{\frac{n}{2}} \triangleq \Lambda_{n,K}, \tag{3.3}$$

那么问题 (3.1) 至少存在一个 (弱) 解.

注记 3.1 当 $K=1$，而 $f(x,u)=a(x)u$ 时，条件 (3.3) 简化为

$$Q_a(v_0) < S,$$

其中 $Q_a(u)$ 已在 63 页由 (2.35) 定义. 特别如果此时 $a(x)\equiv\lambda$，条件 (3.3) 进一步简化为 $Q_\lambda(v_0)<S$，即 $S_\lambda < S$.

确实，我们有

$$\Phi(tv_0) = \frac{t^2}{2}\int\left\{|\nabla v_0|^2 - av_0^2\right\} - \frac{t^N}{N}\|v_0\|_N^N.$$

在 v_0 固定的前提下，$\Phi(tv_0)$ 是 t 的函数，并且取得最大值

$$\sup_{t\geq 0}\Phi(tv_0) = \frac{1}{n}\left[Q_a(v_0)\right]^{n/2}.$$

定理 3.1 的证明依赖于山路引理. 山路引理表明，如果我们能够找到 $H_0^1(\Omega)$ 中的球 B 使得

$$\inf_{\partial B}\Phi(u) \triangleq \rho > 0 = \Phi(0), \tag{3.4}$$

$$\exists\ v \notin \overline{B}\ \text{使得}\ \ \Phi(v) < \rho, \tag{3.5}$$

则

$$c \triangleq \inf_{P\in\mathscr{P}}\max_{u\in P}\Phi(u) \geq \rho \tag{3.6}$$

是 Φ 的渐近临界值，即存在 $u_j \in H_0^1(\Omega)$ 满足

$$\Phi(u_j) \to c, \qquad \Phi'(u_j) \to 0 \text{ 在 } H^{-1} \text{ 中}. \tag{3.7}$$

在 (3.6) 式中，$\mathscr{P}$ 表示空间 $H_0^1(\Omega)$ 中联结 0 与 v 的所有道路 P 的集合.

定理 3.1 的证明 为讨论正解方便，代之以 Φ，用下列泛函 J：

$$J(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 - \int \left\{\frac{1}{N}K(u^+)^N + F(x,u)\right\}. \tag{3.8}$$

其中 $u^+ = \max\{u, 0\}$. 由于我们是讨论正解，故 $f(x,u)$ 在 $u<0$ 时的值与问题无关，我们设 $f(x,u) \equiv 0$ 如果 $u<0$.

证明分三步，第一步是验证山路引理的各条件；第二步是验证由山路引理确定的渐近临界点列 u_j 收敛于 J 的临界点 u，最后第三步证明 $u \neq 0$.

第一步. 任给 $\varepsilon > 0$，根据条件 (f_1)—(f_3)，存在常数 $C>0$，使得

$$g(x,u) \le \varepsilon|u| + C|u|^{N-1}, \quad \forall\, (x,u) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

因而

$$F(x,u) \le \frac{1}{2}(a+\varepsilon)|u|^2 + \frac{C}{N}|u|^N, \quad \forall\, (x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

又由条件 (f_4)，存在正数 μ 及 μ' 使得

$$\int \left\{|\nabla u|^2 - au^2\right\} \ge \mu \int |\nabla u|^2 \ge \mu' \int u^2, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$$

因此有

$$J(u) \ge \frac{1}{2}\int \left(|\nabla u|^2 - (a+\varepsilon)u^2\right) - C'\int |u|^N.$$

取 $\varepsilon = \mu/(2\mu') \triangleq A$，由 Sobolev 不等式 $S\|u\|_N^2 \le \|\nabla u\|_2^2$，我们有

$$J(u) \ge A\|\nabla u\|_2^2 - B\|\nabla u\|_2^N, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega), \tag{3.9}$$

故存在半径适当小中心在原点的球 $B \subset H_0^1(\Omega)$ 及常数 $\rho > 0$ 使得 (3.4) 成立. 现任取一个 $v \in H_0^1(\Omega)$，$0 \not\equiv v \ge 0$，根据 (3.9)，有

$$\lim_{t\to+\infty} J(tv) = -\infty.$$

因而满足条件 (3.5) 的 v 有无限多，然而，为完成证明，须按判据 (3.3) 来选择特殊的 v.

现在，取 $v = t_0 v_0$，其中 v_0 满足条件 (3.3)，t_0 充分大使得 $v \notin B$，且 $J(v) = \Phi(v) < 0$. 选定这样的 v，依 (3.6) 对 c 的定义，条件 (3.3) 可写为，

$$c < \Lambda_{n,K} \tag{3.3}$$

第二步. 由山路引理，$\exists\, u_j \in H_0^1(\Omega)$，使得 $J(u_j) \to c$，$J'(u_j) \to 0$，即

$$\frac{1}{2}\int |\nabla u_j|^2 - \int \left\{\frac{1}{N}K(u_j^+)^N + F(x,u_j)\right\} = c + o(1), \tag{3.10}$$

$$\begin{cases} -\Delta u_j = K(u_j^+)^{N-1} + f(x,u_j) + \zeta_j, \\ \qquad\qquad\qquad \text{其中 } \zeta_j \to 0 \quad \text{在 } H^{-1} \text{ 中}. \end{cases} \tag{3.11}$$

往证 u_j 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界，即证

$$\|\nabla u_j\|_2 \le C. \tag{3.12}$$

确实，以 u_j 乘方程 (3.11) 式两边，积分得

$$\int |\nabla u_j|^2 = \int \left\{K(u_j^+)^N + f(x,u_j)u_j\right\} + \langle u_j, \zeta_j\rangle. \tag{3.13}$$

从 (3.10) 及 (3.13) 中消去积分 $\int |\nabla u_j|^2$ 项，我们有

$$\frac{1}{n}\int K(u_j^+)^N \le \int \left\{F(u_j) - \frac{1}{2}f(x,u_j)u_j\right\} + O(1) + o\big(\|\nabla u_j\|_2\big). \tag{3.14}$$

根据 (f_2)，对于 $\varepsilon > 0$，存在正的常数 C 使得 (注意 $f(x,u) = f(x,u^+)$)

$$|F(u_j)| + |f(x,u_j)u_j| \le \varepsilon(u_j^+)^N + Cu_j^+,$$

于是

$$\int \left\{|F(u_j)| + |f(x,u_j)u_j|\right\} \le \varepsilon \int (u_j^+)^N + C\int u_j^+. \tag{3.15}$$

取 $\varepsilon > 0$ 充分小，注意到 $K_* \le K(x) \le K^*$，由 (3.14) 与 (3.15) 便得

$$\int (u_j^+)^N \le C + C\|\nabla u_j\|_2. \tag{3.16}$$

结合 (3.10)，(3.15) 与 (3.16) 便得 (3.12).

现在可以抽取子列，仍记为 u_j，使得

$$\left\{\begin{array}{lll} u_j \xrightarrow{w} u & 在 H_0^1 中, \\ u_j \xrightarrow{s} u & 在 L^p 中 (p<N), \\ u_j \xrightarrow{p.p.} u & 在 \Omega 中, \\ (u_j^+)^{N-1} \xrightarrow{w} (u^+)^{N-1} & 在 (L^N)^* 中, \\ f(x,u_j) \xrightarrow{w} f(x,u) & 在 (L^N)^* 中. \end{array}\right\} \qquad \text{(limit)}$$

我们断言 $u \geq 0$. 确实，在 (3.11) 中取极限，得

$$-\Delta u = K(u^+)^{N-1} + f(x,u)$$

上式两端乘以 u^- (此时右端为零)，积分得 $\int |\nabla u^-|^2 = 0$，从而 $u^- \equiv 0$，即 $u \geq 0$. 从而 u 满足方程

$$-\Delta u = Ku^{N-1} + f(x,u).$$

我们需证明 $u \not\equiv 0$，如此，根据极大值原理 $u > 0$ 于 Ω.

第三步 $u \not\equiv 0$ 的证明. 用反证法，假定 $u \equiv 0$，那么 $u_j \xrightarrow{s} 0$ 在 L^2 中，由 (3.15)，我们有

$$\int f(u_j)u_j = o(1), \quad \int F(x,u_j) = o(1). \tag{3.17}$$

通过继续抽取子列，我们不妨设

$$\int |\nabla u_j|^2 = \ell + o(1), \quad \ell \geq 0. \tag{3.18}$$

由此根据 (3.13) 及 (3.17) 得

$$\int K(u_j^+)^N = \ell + o(1), \tag{3.19}$$

再由 (3.10) 得，$\frac{1}{n}\ell = c$. 但另一方面，我们有

$$\left[\int K(u_j^+)^N\right]^{2/N} \leq (K^*)^{\frac{2}{N}} \|u_j\|_N^2 \leq \frac{1}{S}(K^*)^{\frac{2}{N}} \|\nabla u_j\|_2^2, \tag{3.20}$$

其中 (3.20) 式的第二个不等式系最佳 Sobolev 不等式. 令 $j \to \infty$，由 (3.18), (3.19) 及关系 $\ell = nc$ 得

$$\ell^{\frac{2}{N}} \le \frac{1}{S}(K^*)^{\frac{2}{N}}\ell \quad \Longleftrightarrow \quad c \ge \frac{1}{n}(K^*)^{-\frac{n}{N}}S^{\frac{n}{2}} = \Lambda_{n,K},$$

与条件 (3.3) 矛盾，故 $u \ne 0$.

2. **一个紧性结论.**

通过山路引理所得泛函 Φ 的临界点，即问题 (3.1) 的解 u，还具有如下特性

$$\text{要么 } \Phi(u) = c \quad \text{要么 } \Phi(u) \le c - \Lambda_{n,K}.$$

在 $f(x,u)$ 满足一定的结构性条件下，第二种情形可以排除，比如，在 f 的原函数 F 满足如下条件

$$F(x,u) \le \frac{1}{2}f(x,u)u + \frac{1}{n}K_* u^N, \quad \forall\, u \ge 0 \text{ 及 } x \in \Omega, \tag{3.21}$$

就可以排除掉第二种情形. 事实上我们有

命题 3.2 若 $f(x,u)$ 的原函数 $F(x,u)$ 满足结构性条件 (3.21)，则对于每一个满足条件 (3.3) 的 c，Φ 满足 $(\mathrm{PS})_c$ 条件.

证明 设 $J(u_j) \to c$，$J'(u_j) \to 0$. 如同定理 3.1 的证明中一样，通过抽子列，可设 $u_j \xrightarrow{w} u$ 于 H_0^1 等 (limit) 诸式，且 $u \ge 0$ 是方程 (3.1) 的解，于是

$$\int |\nabla u|^2 = \int \Big\{Ku^N + f(x,u)u\Big\}, \tag{3.22}$$

这样

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \int \Big\{\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{N}Ku^N - F(x,u)\Big\} \\ &= \int \Big\{\frac{1}{N}Ku^N + \frac{1}{2}f(x,u)u - F(x,u)\Big\} \ge 0.\end{aligned}$$

后一个不等式由条件 (3.21) 而来. 接下来，与 (3.17) 的证明类似，我们有

$$\int f(u_j)u_j = \int f(u)u + o(1), \quad \int F(x,u_j) = \int F(x,u) + o(1). \tag{3.23}$$

令 $\theta_j = u_j - u$，则 $\theta_j \xrightarrow{w} 0$ 于 H_0^1 中，我们有

$$\int |\nabla u_j|^2 = \int |\nabla u|^2 + \int |\nabla \theta_j|^2 + o(1), \tag{3.24}$$

此外根据 Brezis-Lieb 引理 ($d\mu = Kdx$)

$$\int K(u_j^+)^N = \int Ku^N + \int K(\theta_j^+)^N + o(1), \tag{3.25}$$

结合 (3.10)，(3.13) 及 (3.23)，(3.24)，(3.25) 得

$$\Phi(u) + \int \left\{ \frac{1}{2}|\nabla\theta_j|^2 - \frac{1}{N}K(\theta_j^+)^N \right\} = c + o(1), \tag{3.26a}$$

$$\int \left\{ |\nabla u|^2 - Ku^N - f(x,u)u \right\} + \int \left\{ |\nabla\theta_j|^2 - K(\theta_j^+)^N \right\} = o(1), \tag{3.26b}$$

根据 (3.22)，(3.26b) 式化简为

$$\int |\nabla\theta_j|^2 = \int K(\theta_j^+)^N + o(1) = (\text{设}) = l + o(1), \tag{3.27}$$

从而 (3.26a) 变为

$$\Phi(u) + \frac{1}{n}\int |\nabla\theta_j|^2 = c + o(1).$$

于是，$\Phi(u) = c - (1/n)l$. 从 (3.27) 出发，应用 Sobolev 不等式，类似于 (3.20)，可得 $Sl^{2/N} \le (K^*)^{2/N}l$，从而如若 $l \neq 0$，则 $l \ge (K^*)^{-n/N}S^{n/2}$，这将导致 $\Phi(u) \le c - \Lambda_{n,K} < 0$，矛盾. 所以 $l = 0$，这样便完成命题的证明. □

3. **判别的简化**.

直接检验定理 3.1 中的条件 (3.3) 有时比较困难或不便，当 $f(x,u)$ 满足非负条件时，我们可以通过下列命题 3.3 中的不等式 (3.30) 去间接检验. 记

$$E(v) = \int |\nabla v|^2, \quad X(v) = \left(\int K|v|^N \right)^{2/N}. \tag{3.28}$$

命题 3.3 在基本假设 (H) 下，我们进一步假设: 存在以某点 $x_0 \in \Omega$ 为中心的球 $B(x_0) \subset \Omega$ 使得

$$f(x,u) \ge 0 \quad \forall\ (x,u) \in B(x_0) \times \mathbb{R}_+; \tag{3.29}$$

又设 $v \in H_0^1(\Omega)$ 满足 $0 \not\equiv v \ge 0$，$\operatorname{sppt} v \subset B(x_0)$. 则

$$\sup_{t\ge 0} \Phi(tv) \le \frac{1}{n}\left[\frac{E(v)}{X(v)}\right]^{n/2} - \int F(x, t_v v), \tag{3.30}$$

其中 t_v 是函数 $t \mapsto \Phi(tv)$ 取得最大值的点.

证明 事实上，我们有

$$\Phi(tv) = \frac{1}{2}t^2 E(v) - \frac{1}{N}t^N \big[X(v)\big]^{N/2} - \int F(x, tv)$$

由于 $\lim_{t\uparrow\infty} \Phi(tv) = -\infty$，故 $\sup_{t\geq 0} \Phi(tv)$ 在某个有限值 $t_v \geq 0$ 处取到，实际 $t_v > 0$，这是因为 $-(\Delta + a)$ 强制，及 $g(x,u)$ 在 $u = 0$ 附近属于 $o(u)$. 因而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(tv) = 0 \quad 在\ t = t_v > 0\ 处.$$

这就是说

$$t_v E(v) - t_v^{N-1}\big[X(v)\big]^{N/2} - \int f(x, t_v v)v = 0 \tag{3.31}$$

因右端积分非负，我们有

$$t_v \leq \tau_v \triangleq \frac{[E(v)]^{(n-2)/4}}{[X(v)]^{n/4}}, \tag{3.32}$$

注意到 t 的函数

$$\frac{E(v)}{2}t^2 - \frac{[X(v)]^{N/2}}{N}t^N \quad 在区间\ [0,\ \tau_v]\ 上单增$$

因此我们有

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 0}\Phi(tv) &\leq \frac{E(v)}{2}\tau_v^2 - \frac{[X(v)]^{N/2}}{N}\tau_v^N - \int F(x, t_v v)\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{E(v)}{X(v)}\right]^{n/2} - \frac{1}{N}\left[\frac{E(v)}{X(v)}\right]^{n/2} - \int F(x, t_v v)\end{aligned}$$

合并上式右端前两项便获证命题. □

注记 3.2 当 $f(x,u)$ 在下方被某个非负函数 $f(u)$ 控制时，即

$$f(x,u) \geq f(u) \geq 0, \quad \forall\ (x,u) \in B(x_0) \times \mathbb{R}_+,$$

判别可继续简化为

$$\sup_{t\geq 0}\Phi(tv) \leq \frac{1}{n}\left[\frac{E(v)}{X(v)}\right]^{n/2} - \int F(t_v v), \tag{3.33}$$

其中 $F(u)$ 是 $f(u)$ 的原函数，$F(0) = 0$.

从判据 (3.3) 的形式及命题 3.3 的 (3.30) 来看，我们有理由使用上一章类型的试验函数 $u_\varepsilon(x)$ (见 p.56 的 (2.20) 式).

命题 3.4　在基本假设 (H) 下，我们进一步假设：K 在 $x_0 \in \Omega$ 处取得最大值，$f(x,u)$ 在以 x_0 为中心的球 $B_{2\delta} \subset \Omega$ 内对一切 u 非负. 不妨设 $x_0 = 0$，取 $v_\varepsilon = u_\varepsilon / \sqrt{X(u_\varepsilon)}$，则

$$\sup_{t \geq 0} \Phi(tv_\varepsilon) \leq \frac{1}{n}\big[E(v_\varepsilon)\big]^{n/2} - \int F(x, t_\varepsilon v_\varepsilon), \tag{3.34}$$

其中 t_ε 是函数 $t \mapsto \Phi(tv_\varepsilon)$ 取得最大值的点. 此外，当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时，

$$t_\varepsilon \to t_0 > 0. \tag{3.35}$$

证明　我们只须证明 (3.35). 在 $x_0 = 0$ 附近，$K(x) = K^* + o(1)$，根据前一章的估计 (2.21)，(2.22) 及 (2.23) 不难看出

$$E(v_\varepsilon) = \frac{E(u_\varepsilon)}{X(u_\varepsilon)} = \big(K^*\big)^{-\frac{2}{N}} S + o(1), \qquad \|v_\varepsilon\|_2^2 = o(1).$$

因 $X(v_\varepsilon) = 1$，由 (3.31) 得

$$E_\varepsilon - t_\varepsilon^{N-2} - \frac{1}{t_\varepsilon}\int f(x, t_\varepsilon v_\varepsilon) v_\varepsilon = 0,$$

其中 $E_\varepsilon = E(v_\varepsilon)$. 因此，要证明 (3.35) 只须证

$$\frac{1}{t_\varepsilon}\int f(x, t_\varepsilon v_\varepsilon) v_\varepsilon \to 0. \tag{3.36}$$

$\forall\, \eta > 0$，根据基本假设，存在常数 $C > 0$ 使得 (参见 (3.15))，

$$\int f(x, t_\varepsilon v_\varepsilon) t_\varepsilon v_\varepsilon \leq \eta t_\varepsilon^N \|v_\varepsilon\|_N^N + C t_\varepsilon^2 \|v_\varepsilon\|_2^2,$$

因 $X(v_\varepsilon) = 1$，E_ε 及 $\|v_\varepsilon\|_N$ 都有界，故由 (3.32) 知 t_ε 有界，故由上式得 (3.36)，命题得证. □

二、基本估计

面对问题 (3.1)，在做估计时，$K(x)$ 的影响主要来自其取得最大值的点 $x_0 \in \overline{\Omega}$ 附近的性态. 为讨论方便，我们设 $K(x)$ 充分光滑，且有一个最大值点 x_0 位于 Ω 内部. 此时自然地 $\nabla K(x_0) = 0$，K 在 x_0 处一阶平坦.

我们将会看到，若 $K(x)$ 在 x_0 处充分平坦 ($\nabla^{n+1} K(x_0) = 0$)，则 $K(x)$ 形同常数，若 $n \geq 5$，则任何符合基本假设的非负扰动 $f(x, u)$ 都使得问题可解.

当 K 在 x_0 处一阶平坦时，若 $n = 4$，则问题对渐近线性（包含线性）及超线性扰动 $f(x, u)$ 可解；若 $n \geq 5$，则问题对超线性扰动 $f(x, u)$ 可解.

在假设 $\nabla^2 K(x_0) = 0$ (此时必有 $\nabla^3 K(x_0) = 0$) 下，$n \geq 5$，问题对渐近线性及超线性扰动 $f(x, u)$ 可解. 其余情形则相对复杂.

1. 基本估计.

我们继续沿用前章符号，ψ 及 ψ_ε 由 p.56 (2.17) 定义，$\phi_\varepsilon \triangleq \varepsilon^{(n-2)/2} \psi_\varepsilon$. u_ε 由 p.56 的 (2.20) 定义.

前一章我们已经得到 $\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2$ 及 $\|u_\varepsilon\|_2^2$ 的估计 (见 (2.21) 及 (2.23))，为方便，现在重新列出：

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \|\nabla \psi\|_2^2 \, \varepsilon^{2-n} + O(1), \; n \geq 3, \tag{3.37}$$

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \begin{cases} I_n \, \varepsilon^{4-n} + O(1), & n \geq 5, \\ I_4 \, |\log \varepsilon| + O(1), & n = 4, \\ O(1), & n = 3, \end{cases} \tag{3.38}$$

其中 I_n 是只与维数 n 有关的正数.

为给出 $X(u_\varepsilon)$ 的估计，我们需对函数 $K(x)$ 作出一些假设. 假定 $K(x)$ 在某个**内点** $x_0 \in \Omega$ 处取得最大值，为方便，不妨设 $x_0 = 0$，并且 $K(x)$ 在该点满足一定的平坦条件，即

$$K(x) = K^* + O(|x|^k), \quad k > 0. \tag{3.39}$$

这里 k 不必是整数，$K^* = K(0) = \max_{x \in \overline{\Omega}} K$. 在这样的前提下，我们有

命题 3.5 设 $K(x)$ 在 $x = 0$ 处取最大值 K^* 且满足平坦条件 (3.39). 设 u_ε 为 (2.20) 式所给试验函数，则对于 $n \geq 3$ 有

$$E(v_\varepsilon) = \left(K^*\right)^{-\frac{2}{N}} S + \begin{cases} O(\varepsilon^{n-2}), & k \geq n-2, \\ O(\varepsilon^k), & k < n-2. \end{cases} \tag{3.40}$$

证明 事实上，我们有下列估计

$$X(u_\varepsilon) = (K^*)^{\frac{2}{N}} \|\psi\|_N^2 \, \varepsilon^{2-n} + \begin{cases} O(\varepsilon^2), & k > n \\ O(\varepsilon^2 \log \varepsilon), & k = n \\ O(\varepsilon^{k+2-n}), & k < n \end{cases} \tag{3.41}$$

因此，由 (3.37) 及 (3.41) 便可得出 (3.40).

今往证 (3.41). 因 ψ_ε 从而 u_ε 在 B_δ 外有界，而在 B_δ 上 $u_\varepsilon = \psi_\varepsilon$，故

$$\int_\Omega K|u_\varepsilon|^N = \int_{B_\delta} K|\psi_\varepsilon|^N + O(1),$$

由 $K(x)$ 的展式得

$$\int_\Omega K|u_\varepsilon|^N = \int_{B_\delta} \frac{(K^* + O(|x|^k))\,\mathrm{d}x}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^n} + O(1).$$

但 (见 (2.22) 式及其证明)

$$\int_{B_\delta} \frac{K^* \,\mathrm{d}x}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^n} = K^* \|\psi\|_N^N \varepsilon^{-n} + O(1),$$

而当 $k > n$ 时，我们有 $2n - k < n$，所以

$$\int_{B_\delta} \frac{|x|^k \,\mathrm{d}x}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^n} \le \int_{B_\delta} \frac{\mathrm{d}x}{|x|^{2n-k}} = O(1);$$

当 $k = n$ 时，

$$\int_{B_\delta} \frac{|x|^k \,\mathrm{d}x}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^n} = \omega_{n-1} \int_0^\delta \frac{r^{2n-1} \,\mathrm{d}r}{(\varepsilon^2 + r^2)^n} = O(\log \varepsilon);$$

当 $k < n$ 时，

$$\int_{B_\delta} \frac{|x|^k \,\mathrm{d}x}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^n} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^k \,\mathrm{d}x}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^n} + O(1) = O(\varepsilon^{k-n}).$$

因此在各种情形，都有估计 (3.41). □

2. Brezis-Nirenberg 的充分条件.

将命题 3.4 与 3.5 相结合，便意味着各种存在性结论.

引理 3.6 在基本假设 (H) 下，进一步假设: $K(x)$ 在原点 $o\in\Omega$ 取最大值 K^* 且满足平坦条件 (3.39); 存在 $f(u)$ 使得在以原点为中心的某个球 $B\subset\Omega$ 上

$$f(x,u)\geq f(u)\geq 0\quad \forall\, x\in B,\ u\geq 0, \tag{3.42}$$

如果 $f(u)$ 的原函数 $F(u)=\int_0^u f(s)\mathrm{d}s$ 满足下列条件之一

$$\varepsilon^{2-n}\int_B F(\phi_\varepsilon)\mathrm{d}x\to\infty \qquad \text{如果 } k\geq n-2, \tag{3.43a}$$

$$\varepsilon^{-k}\int_B F(\phi_\varepsilon)\mathrm{d}x\to\infty \qquad \text{如果 } k< n-2. \tag{3.43b}$$

那么判据 (3.3) 成立，而问题 (3.1) 有解.

证明 首先指出，若 (3.43) 成立，则将 B 换作任一球 B_ρ 也成立. 这是因为，在 B_ρ 外，$\phi_\varepsilon(x)\leq C\varepsilon^{(n-2)/2}$，根据条件 (f_2)，有 $F(\phi_\varepsilon)=O(\varepsilon^{n-2})$.

取 δ 充分小，使得 $B_{2\delta}\subset B$. 根据命题 3.4，命题 3.5 及注记 3.2，

$$\sup_{t\geq 0}\Phi(tv_\varepsilon)\leq\Lambda_{n,K}-\int_{B_\delta}F(t_\varepsilon v_\varepsilon)+\begin{cases}O(\varepsilon^{n-2}), & k\geq n-2,\\ O(\varepsilon^k), & k<n-2.\end{cases}$$

因 $t_\varepsilon\geq\tau$(正常数)，在 B_δ 内，我们有 $u_\varepsilon=\psi_\varepsilon$，所以根据 (3.41)，

$$v_\varepsilon=\frac{u_\varepsilon}{\sqrt{X(u_\varepsilon)}}\geq C\varepsilon^{(n-2)/2}\psi_\varepsilon=C\phi_\varepsilon.$$

因此，在B_δ 内 $t_\varepsilon v_\varepsilon\geq A\phi_\varepsilon$，$A>0$ 是常数. 于是根据 $F(u)$ 的单调性

$$\int_{B_\delta}F(t_\varepsilon v_\varepsilon)\geq\int_{B_\delta}F(A\phi_\varepsilon)=a^{-n}\int_{B_{a\delta}}F(\phi_{a\varepsilon}),$$

其中 $a=A^{2/(2-n)}$. 我们有

$$\sup_{t\geq 0}\Phi(tv_\varepsilon)\leq\Lambda_{n,K}-a^{-n}\int_{B_{a\delta}}F(\phi_{a\varepsilon})+\begin{cases}O(\varepsilon^{n-2}), & k\geq n-2,\\ O(\varepsilon^k), & k<n-2.\end{cases}$$

根据 (3.43)，对于充分小的 ε，判据 (3.3) 成立. □

第二节　各种存在性结论

本节我们将按照摄动项 $f(x,u)$ 的"显著程度"，在 $K(x)$ 的某最大值点（设为 $o\in\Omega$，且总如此假设）足够平坦的条件下展开讨论. 我们总假设

$$\begin{cases} K(0)=K^*=\sup K(x), & o\in\Omega, \\ K(x)=K^*+O(|x|^k), & (k\geq 1), \end{cases} \tag{flat}$$

其中 k 不必是整数. 我们称 K 满足 k 阶平坦条件，如果条件 (flat) 成立. Escobar [94] 曾指出，一定的平坦条件对解的存在性是必要的.

一、情形 $n\geq 5$

1. 小扰动显效的情形.

接下来的定理 3.7 表明，只要 K 在某个最大值点足够平坦，则不论摄动项 $f(x,u)$ 多么微不足道，大扰动更不例外，均使问题 (3.1) 有解.

假定 $f(x,u)$ 除满足基本假设 (f_1)—(f_4) 外还满足

$$\begin{cases} f(x,u)\geq 0, & \forall\, x\in B,\ \forall\, u\geq 0, \\ f(x,u)\geq \mu>0, & \forall\, x\in B,\ \forall\, u\in I, \end{cases} \tag{3.44}$$

其中 $B\subset\Omega$ 是中心在原点 o 的球，$I\subset(0,\infty)$ 是某一非空区间.

定理 3.7　在基本假设 (H) 下，设 $f(x,u)$ 满足 (3.44)，设 $K(x)$ 满足 $k>\frac{n}{2}$ 阶平坦条件 (flat)，则问题 (3.1) 有解.

证明　由条件 (3.44) 可看出

$$f(x,u)\geq \mu\chi_I(u)\triangleq f(u)\quad \forall\, x\in B,\ \forall\, u\geq 0,$$

其中 χ_I 是 I 的特征函数. 因而存在常数 $\beta>0$ 及 $b>0$，使得

$$F(u)\geq\beta>0,\quad \forall\, u\geq b.$$

取 $\eta>0$ 充分小，但 $\varepsilon\ll\eta$，使得当 $|x|\leq\sqrt{\eta\varepsilon}$ 时，$\phi_\varepsilon(x)\geq b$，从而此时 $F(\phi_\varepsilon)\geq\beta$. 于是

$$\varepsilon^{-k}\int_B F(\phi_\varepsilon)\,\mathrm{d}x\geq\varepsilon^{-k}\int_{B_{\sqrt{\eta\varepsilon}}}\beta\geq C\varepsilon^{(n/2)-k}.$$

因 $k > n/2$，上式右端趋于无穷大，即 (3.43b) 成立（因为 $n \geq 5$，可设 $k < n-2$），应用引理 3.6 便完成定理的证明. □

例 3.1 $K = 1$，$f = u^2/(1+u^4)$ 满足定理 3.7 的条件.

2. 渐近线性扰动显效的情形.

在小扰动情形，要求 $K(x)$ 有较高阶的平坦性，在大扰动情形，则可大大降低平坦性的要求.

对于 $f(x,u)$，除基本条件 (f_1)—(f_4) 外，假定它还满足

$$\begin{cases} f(x,u) \geq 0, & \forall\, x \in B,\ \forall\, u \geq 0, \\ f(x,u) \geq \lambda u, & \forall\, x \in B,\ \forall\, u \geq b, \end{cases} \tag{3.45}$$

其中 $B \subset \Omega$ 是中心在原点 o 的球，λ, b 是正的常数.

定理 3.8 在基本假设 (H) 下，设 $f(x,u)$ 满足 (3.45)，设 $K(x)$ 满足 $k > 2$ 阶平坦条件 (flat)，则问题 (3.1) 有解.

证明 由条件 (3.45) 可看出

$$f(x,u) \geq \lambda\big(\chi_{[b,\infty)}\big)u \triangleq f(u), \quad \forall\, x \in B,\ \forall\, u \geq 0.$$

故当 $u \geq 2b$ 时 $f(u)$ 的原函数 $F(u) = \int_0^u f(s)\mathrm{d}s$ 满足

$$F(u) \geq (\lambda/4)u^2 \triangleq \lambda_0 u^2.$$

另外（参见定理 3.7 的证明），只要 $\varepsilon > 0$ 适当小，则当 $|x| \leq \varepsilon$ 时，$\phi_\varepsilon(x) \geq 2b$，从而 $F(\phi_\varepsilon) \geq \lambda_0\phi_\varepsilon^2$，于是

$$\int_B F(\phi_\varepsilon) \geq \lambda_0 \int_{B_\varepsilon} \phi_\varepsilon^2 = \lambda_0 \int_{B_\varepsilon} \frac{\varepsilon^{n-2}\mathrm{d}x}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{n-2}} \doteq \lambda_0 I \varepsilon^2,$$

其中 $I = \int_{B_1}(1+|x|^2)^{2-n}\mathrm{d}x$. 因 $k > 2$，故当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$$\varepsilon^{-k}\int_B F(\phi_\varepsilon) \geq \lambda_0 I \varepsilon^{2-k} \to \infty,$$

即 (3.43b) 成立（因为 $n \geq 5$，可设 $k < n-2$），应用引理 3.6 便完成定理 3.8 的证明. □

例 3.2 设 K 满足 $k > 2$ 阶平坦条件 (flat)，则 $f = \lambda u$，$\lambda \in (0, \lambda_1)$，符合定理 3.8 的条件.

3. **超线性扰动.**

假定扰动 $f(x,u)$ 在 $u=\infty$ 处以超线性增长，即

$$\begin{cases} f(x,u)\geq 0 & \forall\, x\in B,\ \forall\, u\geq 0, \\ \lim\limits_{u\to\infty} f(x,u)/u=\infty & \text{关于 } x\in B \text{ 一致}, \end{cases} \tag{3.46}$$

其中 $B\subset\Omega$ 是中心在原点 o 的球.

定理 3.9 在基本假设 (H) 下，设 $f(x,u)$ 满足 (3.46)，设 $K(x)$ 满足 $k=2$ 阶平坦条件 (flat)，则问题 (3.1) 有解.

当 $K(x)$ 在其最大值点 o 处二阶可微时，2 阶平坦条件自动满足. 从这个意义上说，定理 3.9 是最佳结论.

证明 我们将以 $k=2$ 验证 (3.43). 记 $f(u)=\inf\limits_{x\in B} f(x,u)$，则当 $x\in B$ 时，$f(x,u)\geq f(u)\geq 0$，且根据 (3.46)，$\lim\limits_{u\to\infty} f(u)/u=\infty$，因此

$$T(u)\triangleq F(u)/u^2\to\infty \quad (\,u\to\infty\,),$$

其中 $F(u)$ 是 $f(u)$ 的原函数，$F(0)=0$. 因为当 $|x|\leq\varepsilon$ 时，$\phi_\varepsilon(x)\to\infty$，若记

$$T_\varepsilon=\inf_{|x|\leq\varepsilon} T\big(\phi_\varepsilon(x)\big),$$

则 $T_\varepsilon\to\infty$. 我们有

$$\int_B F(\phi_\varepsilon)\geq\int_{B_\varepsilon} T(\phi_\varepsilon)\phi_\varepsilon^2\geq T_\varepsilon\int_{B_\varepsilon}\frac{\varepsilon^{n-2}\mathrm{d}x}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{n-2}}=I_1T_\varepsilon\varepsilon^2.$$

其中 $I_1=\int_{B_1}(1+|x|^2)^{2-n}\mathrm{d}x$. 于是，当 $\varepsilon\to 0$ 时，

$$\varepsilon^{-2}\int_B F(\phi_\varepsilon)\geq I_1T_\varepsilon\to\infty,$$

即 (3.43b) 对于 $k=2$ 成立（注意 $n\geq 5$），应用引理 3.6 便完成定理的证明. □

例 3.3 $K\in C^2(\overline{\Omega})$，且在某个内点取最大值，则平坦性条件自动满足. 此时 $f(x,u)=u^q$，$1<q<N-1$，符合定理 3.8 的条件.

例 3.4 K 同例 3.3，$f(x,u)=u\log(1+u)$，符合定理 3.8 的条件.

二、情形 $n=4$

在 $n=4$ 的情形，我们没有小扰动的结论．但对于渐进线性（包括超线性）扰动，我们有一个较好的结果．就平坦性而言，下面的定理 3.10 是最佳的．

我们设 $f(x,u)$ 除满足基本条件 (f_1)—(f_4) 外还满足

$$\begin{cases} f(x,u)\geq 0, & \forall\, x\in B,\ \forall\, u\geq 0, \\ f(x,u)\geq \lambda u, & \forall\, x\in B,\ \forall\, u\in[b,\infty), \end{cases} \tag{3.47a}$$

$$\begin{cases} f(x,u)\geq 0, & \forall\, x\in B,\ \forall\, u\geq 0, \\ f(x,u)\geq \lambda u, & \forall\, x\in B,\ \forall\, u\in[0,b], \end{cases} \tag{3.47b}$$

其中 $B\subset\Omega$ 是中心在原点 o 的球，λ, b 是正的常数．

定理 3.10　在基本假设 (H) 下，设 K 满足 $k=2$ 阶平坦条件 (flat)，如果 $f(x,u)$ 满足 (3.47a) 或 (3.47b) 之一，则问题 (3.1) 有解．

证明　由条件 (3.47) 可看出，$f(x,u)\geq\lambda\chi_I u\ \triangleq\ f(u)$ 在 $B\times[0,\infty)$ 上成立．其中 I 或者是区间 $[b,\infty)$ 或者是区间 $[0,b]$．因此，当 (3.47a) 或 (3.47b) 成立时，分别有

$$F(u)=(\lambda/2)\big(u^2-b^2\big),\qquad \forall\, u\geq b; \tag{3.48a}$$

$$F(u)=(\lambda/2)u^2,\qquad \forall\ 0\leq u\leq b. \tag{3.48b}$$

情形 1．当 (3.48a) 成立时，存在只依赖于 b 的常数 $\eta>0$，使当 $|x|\leq\sqrt{\eta\varepsilon}$ 时，$\phi_\varepsilon(x)\geq 2b$, $\Longrightarrow F(\phi_\varepsilon)\geq(\lambda/4)\phi_\varepsilon^2$，从而

$$\int_B F(\phi_\varepsilon)\geq\frac{\lambda}{4}\int_{B_{\sqrt{\eta\varepsilon}}}\phi_\varepsilon^2=\frac{\lambda}{4}\int_{B_{\sqrt{\eta\varepsilon}}}\frac{\varepsilon^2\,\mathrm{d}x}{(\varepsilon^2+|x|^2)^2}$$

$$=\frac{\lambda\varepsilon^2}{4}\int_0^{\sqrt{\eta/\varepsilon}}\frac{\omega_3 r^3\,\mathrm{d}r}{(1+r^2)^2}=A_0\varepsilon^2|\log\varepsilon|+O(\varepsilon^2),$$

其中 $A_0=(1/8)\lambda\omega_3$．于是，当 $\varepsilon\to 0$ 时，

$$\varepsilon^{-2}\int_B F(\phi_\varepsilon)\to\infty;$$

情形 2　当 (3.48b) 成立时，存在充分大的常数 $A > 0$，使当 $|x| \geq \sqrt{A\varepsilon}$ 时，$\phi_\varepsilon(x) \leq b$，$\Longrightarrow F(\phi_\varepsilon) = (\lambda/2)\phi_\varepsilon^2$，从而

$$\int_B F(\phi_\varepsilon) \geq \frac{\lambda}{2} \int\limits_{\sqrt{A\varepsilon}\leq|x|\leq\delta} \phi_\varepsilon^2 = \frac{\lambda}{2} \int\limits_{\sqrt{A\varepsilon}\leq|x|\leq\delta} \frac{\varepsilon^2 \mathrm{d}x}{(\varepsilon^2+|x|^2)^2}$$

$$= \frac{\lambda\varepsilon^2}{2} \int_{\sqrt{A/\varepsilon}}^{\delta/\varepsilon} \frac{\omega_3 r^3 \mathrm{d}r}{(1+r^2)^2} = A_0\varepsilon^2|\log\varepsilon| + O(\varepsilon^2),$$

其中 $A_0 = (1/4)\lambda\omega_3$. 于是，当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$$\varepsilon^{-2}\int_B F(\phi_\varepsilon) \to \infty.$$

故在两种都有 (3.43a)，应用引理 3.6 便完成定理 3.10 的证明. □

例 3.5 (Escobar [94])　$K \in C^2(\overline{\Omega})$，且在某个内点取最大值，则平坦条件自动满足. $f(x,u) = \lambda u$，$0 < \lambda < \lambda_1$，符合定理 3.10 的条件.

三、情形 $n = 3$

$n = 3$ 的情形仍表现得相当精细. 有两个结论，超三次扰动和次三次超线性扰动 (最精细的情形是线性扰动).

1. 超三次扰动.

假定扰动 $f(x,u)$ 在 $u = \infty$ 处以超三次增长，即

$$\begin{cases} f(x,u) \geq 0, & \forall\, x \in B,\ \forall\, u \geq 0, \\ \lim\limits_{u\to\infty} f(x,u)/u^3 = \infty, & \text{关于 } x \in B \text{ 一致}. \end{cases} \tag{3.49}$$

其中 $B \subset \Omega$ 是中心在原点 o 的球.

定理 3.11　在基本假设 (H) 下，设 K 满足 $k = 2$ 阶平坦条件 (flat)，$f(x,u)$ 满足 (3.49)，则问题 (3.1) 可解.

注意，当 $K(x)$ 在其最大值点 o 处二阶可微时，平坦条件 (flat) 自动满足. 从这个意义上说，定理 3.11 是最佳的.

证明 记 $\inf\limits_{x\in B} f(x,u) \triangleq f(u)\ (\geq 0)$，根据 (3.49)，$\lim\limits_{u\to\infty} f(u)/u^3 = \infty$，故

$$T(u) \triangleq F(u)/u^4 \to \infty \quad (\ u \to \infty\ ),$$

其中 $F(u) = \int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t$. 因当 $|x| \leq \varepsilon$ 时，$\phi_\varepsilon(x) \to \infty$，若记

$$T_\varepsilon = \inf_{|x|\leq\varepsilon} F\big(\phi_\varepsilon(x)\big),$$

则 $T_\varepsilon \to \infty$. 我们有

$$\int_B F(\phi_\varepsilon) \geq \int_{B_\varepsilon} T(\phi_\varepsilon)\phi_\varepsilon^4 \geq T_\varepsilon \int_{B_\varepsilon} \frac{\varepsilon^2\,\mathrm{d}x}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^2} = I_1 T_\varepsilon \varepsilon.$$

其中 $I_1 = \int_{B_1} (1+|x|^2)^{-2}\mathrm{d}x$. 于是，当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$$\varepsilon^{-1} \int_B F(\phi_\varepsilon) \geq I_1 T_\varepsilon \to \infty.$$

即 (3.43a) 成立（注意 $k=2$, $2-n=-1$），定理 3.11 由引理 3.6 获证. □

2. 次三次扰动.

引进参数 $\mu > 0$，并令 $f(x,u) = a(x)u + \mu g(x,u)$. 设

$$\begin{cases} g(x,u) \geq 0, & \forall\, x \in B,\ \forall\, u \geq 0; \\ g(x,u) > 0, & \forall\, x \in B,\ \forall\, u \in I. \end{cases} \tag{3.50}$$

其中 $B \subset \Omega$ 是某个球域，$I \subset \mathbb{R}_+$ 是非空区间.

定理 3.12 设 $f(x,u) = a(x)u + \mu g(x,u)$ 满足条件 (f_1)—(f_4) 及 (3.50)，设 $K(x)$ 满足条件 (K)，则存在 $\mu_0 \geq 0$，使得当 $\mu \geq \mu_0$ 时问题 (3.1) 有解.

例 3.6 定理 3.12 的成立不必有 K 的平坦性条件. $f(x,u) = \lambda u + \mu u^q$ 符合定理 3.12 的条件. 其中 $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$，$1 < q \leq 3$.

例 3.7 设 $n = 3$, $1 < q \leq 3$，考虑下列问题

$$-\Delta u = u^5 + \mu u^q,\ u > 0 \ \text{ 在 } \Omega \text{ 中}, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3.51}$$

根据定理 3.12，存在 $\mu_0 \geq 0$，使得当 $\mu \geq \mu_0$ 时问题 (3.51) 有解.

另一方面，Brezis-Nirenberg [52] 引述了一个数值计算结果，它显示，当 Ω 是一球域时，会有下列结论：

(α) 当 $q=3$ 时，存在 $\mu_0>0$，使得当 $\mu>\mu_0$ 时，问题 (3.51) 有唯一解；当 $\mu\le\mu_0$ 时，问题 (3.51) 无解.

(β) 当 $1<q<3$ 时，存在 $\mu_0>0$，使得当 $\mu=\mu_0$ 时，问题 (3.51) 有唯一解；当 $\mu>\mu_0$ 时，问题 (3.51) 有两解；当 $\mu<\mu_0$ 时，问题 (3.51) 无解.

命题 3.13 设 Ω 是关于原点 o 的**严格星形区域**，$1<q\le 3$. 若问题 (3.51) 有解 u，则 $\mu\ge\mu_0(\Omega,q)>0$.

命题 3.13 说明在定理 3.12 中引入参数 μ 是必要的.

证明 仅就 $q=3$ 的情形给出证明，其余情形稍许简单. 应用 Pohozaev 恒等式，然后由 Hölder 不等式 及 Green 恒等式得

$$\mu\int_\Omega u^4 = 2\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2 \ge c\left(\int_\Omega|\Delta u|\right)^2, \tag{3.52}$$

由方程 (3.51) 得 $|\Delta u|\ge u^5$，因而

$$\mu\|u\|_4^4\ge C\|u\|_5^{10}. \tag{3.53}$$

设 $G(x,u)$ 是区域 Ω 上 Laplace 算子 Δ 的第一类 Green 函数，则有 Green 表示 (见 Gilbarg-Trudinger [106])

$$u(x)=\int_\Omega G(x,y)\,\Delta u(y)\,\mathrm{d}y.$$

由于 $|G(x,y)|\le C|x-y|^{-1}$，于是

$$u(x)\le C(|x|^{-1})*|\Delta u(x)|,$$

注意到 $|x|^{-1}\in L_w^3$ (弱 L^p 空间的定义见 p.38)，由广义 Young 不等式 (见 p.336 命题 C.10) 得

$$[u]_3\le C\big[|x|^{-1}\big]_3\|\Delta u\|_{L^1}.$$

于是根据 (3.52) 又有

$$\mu\|u\|_4^4\ge C[u]_3^2. \tag{3.54}$$

将 $(3.53)^{1/4}$ 与 $(3.54)^{3/4}$ 相乘得

$$\mu\|u\|_4^4 \geq C[u]_3^{3/2}\|u\|_5^{5/2}.$$

但另一方面，我们有如下插值不等式（证明见本节末 p.98）

$$\|u\|_4^4 \leq C[u]_3^{3/2}\|u\|_5^{5/2}. \tag{3.55}$$

于是 $\mu \geq C > 0$，C 只依赖于 q（这里 $q=3$）及 Ω. □

定理 3.12 的证明 我们将用与以往不同的试验函数，直接验证判据 (3.3) 成立. 不妨设 $o \in B$，令

$$v_0(x) = \alpha(x)|x|^{-k}$$

其中 $1 < k < 1/2$，$\alpha \in \mathscr{D}_+(B)$，$\alpha(0) > 0$ 且 $\int Kv_0^6 = 1$. 我们有

$$\Phi_\mu(tv_0) = \frac{1}{2}At^2 - \frac{1}{6}t^6 - \mu\int G(x, tv_0),$$

其中 $A = \int |\nabla v_0|^2 - av_0^2\}$. 将证明：

$$\lim_{\mu\to\infty}\sup_{t\geq 0}\Phi_\mu(tv_0) = 0, \tag{3.56}$$

若此，判据 (3.3) 便对充分大的 μ 成立，定理 3.12 因而得证.

首先注意，$\lim_{t\to\infty}\Phi_\mu(tv_0) = -\infty$，因而 $\sup_{t\geq 0}\Phi_\mu(tv_0)$ 在某个有限值 $t = t_\mu$ 处取得，故

$$t_\mu A - t_\mu^5 - \mu\int g(x, t_\mu v_0)v_0 = 0, \tag{3.57}$$

因此 $t_\mu \leq A^{1/4}$，从而

$$\lim_{\mu\to\infty} t_\mu = 0. \tag{3.58}$$

确实，如若不然，将有序列 $\mu_j \to \infty$ 使得 $t_{\mu_j} \to l$，根据 (3.57) 就有 $\int g(x, lv_0)v_0 = 0$，与 v_0 的选择（值域含盖整个 $\mathbb{R}_+$）和 (3.50) 矛盾.

最后，由于

$$\sup_{t\geq 0}\Phi_\mu(tv_0) \leq \frac{1}{2}At_\mu^2 - \frac{1}{6}t_\mu^6,$$

从 (3.58) 便推得 (3.56). □

在结束本节前，我们给出一个推论，以资下节之用.

推论 3.14 设 $n \geq 3$ 并设 $K = 1$. 如果 $f(x,u)$ 除满足基本假设 (f_1)—(f_4) 外还满足: 存在球 $B \subset \Omega$ 使得

$$\begin{cases} f(x,u) \geq 0, & \forall\, x \in B,\ \forall\, u \geq 0; \\ \varliminf\limits_{u\to\infty} \dfrac{f(x,u)}{u^{N-2}} \geq C, & \text{关于 } x \in B \text{ 一致}, \end{cases} \tag{3.59}$$

其中 $C > 0$ 是常数, 则问题 (3.1) 有解.

证明 情形 $n \geq 5$. 条件 (3.59) 意味着存在充分大的实数 a, b，使得当 $u \in [a, b]$ 时，$|f(x,u)| \geq 1$，即条件 (3.44) 成立. 应用定理 3.7 获证推论.

情形 $n = 4$. 此时 $N = 4$，条件 (3.59) 意味着 $f(x,u)$ 在无穷远处超线性增长，故条件 (3.47a) 对于某个充分大的 b 成立. 应用定理 3.10 获证推论.

情形 $n = 3$. 此时 $N = 6$，条件 (3.59) 意味着 $f(x,u)$ 在无穷远处超三次增长，因而条件 (3.49) 成立. 应用定理 3.11 获证推论. □

插值不等式 (3.55) 的证明

我们须在已知 $u \in L^3_w \cap L^5$ 的条件下，证明不等式 (3.55). 这一不等式当然可以推广到一般情形.

设 f 是 u 的一维单减重排（见 p.29），给定 $\lambda > 0$，记 f_λ 及 f^λ 为 f 的截函数（见 327 页 (C.2)），则（见 29 页性质 (5)）

$$\int_\Omega u^4 \mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(f_\lambda(t)\right)^4 \mathrm{d}t + \int_0^\infty \left(f^\lambda(t)\right)^4 \mathrm{d}t.$$

对所有 t，我们有 $f_\lambda(t) \leq f(t)$，及 $f_\lambda(t) \leq \lambda$.

又因 $u \in L^3_w$，有 $f \in L^3_w$ 且 $f(t) \leq [f]_3 t^{-1/3}$. 若记 $t_\lambda = [f]_3^3 \lambda^{-3}$，则

$$\int_0^\infty (f_\lambda)^4 \mathrm{d}t \leq \int_0^{t_\lambda} \lambda^4 \mathrm{d}t + \int_{t_\lambda}^\infty [f]_3^4 t^{\frac{-4}{3}} \mathrm{d}t = 3\lambda [f]_3^3.$$

关于 f^λ，我们有 $\lambda (f^\lambda)^4 \leq f^5$，因此

$$\int_0^\infty (f^\lambda)^4 \mathrm{d}t \leq \int_0^\infty \lambda^{-1} |f|^5 \mathrm{d}t = \lambda^{-1} \|f\|_5^5.$$

将以上两个积分不等式相加，右端关于 λ 取最小值，便得

$$\|u\|_4^4 \leq 2\sqrt{3}[f]_3^{3/2} \|f\|_5^{5/2} = 2\sqrt{3}[u]_3^{3/2} \|u\|_5^{5/2}.$$

第三节 多解性结论

本节将讨论在临界情形，非线性椭圆方程的多解性结论．简明起见，只讨论两个特殊的问题，一个是非线性特征值问题 (3.61)，另一个是 Ambrosetti-Prodi 问题 (3.65)．这两个问题都适合一个更一般的方程

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= H(x,u,\lambda) && \text{在 } \Omega \text{ 中},\\
u &> 0 && \text{在 } \Omega \text{ 中},\\
u &= 0 && \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}.
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

其中 $H:\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 是连续函数，$H(x,0,\lambda)\not\equiv 0$，$H(x,0,0)\equiv 0$.

作为上述问题的特例，当 $H=\lambda(u+1)^{N-1}$ 时，对应非线性特征值问题．而在 $H=u^{N-1}+\lambda h$，则对应 Ambrosetti-Prodi 问题．

在接下来的第一目，我们将给出问题 (3.60) 存在极小解的条件．这里，我们说 u_λ 是问题 $(3.60)_\lambda$ 的极小解，如果对于 $(3.60)_\lambda$ 的任一解 v 都有 $u_\lambda\le v$.

在第二目及第三目，我们将用变分法分别讨论非线性特征值问题 (3.61) 及 Ambrosetti-Prodi 问题 (3.65) 非极小解的存在性．

一、极小解及其性质

设函数 $H:\overline{\Omega}\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 连续且具有连续的一阶偏导数，满足

(H_1) 非负性 $\forall\,(x,\lambda)\in\Omega\times\mathbb{R}_+$ 有 $H(x,0,\lambda)\ge 0$，且 $H(x,0,0)\equiv 0$;

(H_2) 单调性 $\forall\,(x,u,\lambda)\in\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ 有 $H_\lambda(x,u,\lambda)\ge 0$，$H_u(x,u,\lambda)\ge 0$;

(H_3) 凸 性 H_λ 及 H_u 分别是 λ 及 u 的凸函数，且存在 $x_0\in\Omega$ 使得当 $\lambda>0$ 时，$H_u(x_0,u,\lambda)$ 关于 u 严格凸;

(H_4) 强制性 算子 $(-\Delta-H_u(x,0,0))$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上强制;

(H_5) 增长性 $|H(x,u,\lambda)|\le C_\lambda(1+|u|^{N-1})$，$C_\lambda$ 是与 x 及 u 无关的常数.

在这些条件下，我们有

定理 3.15 设 Ω 是 $n\ge 2$ 维有界区域，函数 $H(x,u,\lambda)$ 满足条件 (H_1)——(H_5)，则存在 $\lambda^*\in(0,\infty)$ 使得:

(α) 当 $\lambda>\lambda^*$ 时问题 (3.60) 无解，当 $\lambda=\lambda^*$ 时问题 (3.60) 有唯一解;

(β) 对于每一个 $\lambda \in (0, \lambda^*)$，问题 (3.60) 具有一极小解 u_λ，且极小解 u_λ 是稳定解，即算子 $-(\Delta + H_u(x, u_\lambda, \lambda))$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上强制.

我们可用多种方法证明定理 3.15，比如可用上下解及比较原理加以证明（参见 Grandall-Rabinowitz [108] 及王 [243]），也可用锥空间上的单调算子理论加以证明 (参见 Amann [21]，Aubin-Wang [11] 或 Wang [205]).

例 3.8 当 $H = \lambda(u+1)^{N-1}$，或 $H = u^{N-1} + \lambda h(x)$ 时 ($0 \le h(x) \not\equiv 0$)，H 满足定理 3.15 的条件，因此定理 3.15 的结论对于后面讨论的非线性特征值问题 (3.61) 及 Ambrosetti-Prodi 问题 (3.65) 均成立.

进一步讨论还可发现，问题 (3.60) 的极小解 (λ, u_λ) 在锥空间 $C_+(\overline{\Omega})$ 中构成一条从 $(0,0)$ 发出的上升的连续曲线 (图 3.1 中的粗线)

$$\Sigma_1 = \{(\lambda, u_\lambda) : 0 \le \lambda \le \lambda^*\},$$

问题 (3.60) 的解在 $(\lambda^*, u_{\lambda^*})$ 的附近分叉出另一支下降的、向里弯曲的连续解曲线 Σ_2，在图 3.1 中用实细线表示. 除 Σ_1，Σ_2 外，在 $(\lambda^*, u_{\lambda^*})$ 附近没有其他解. 图中的虚线则代表其他复杂情形，按分叉理论，它们是无界的.

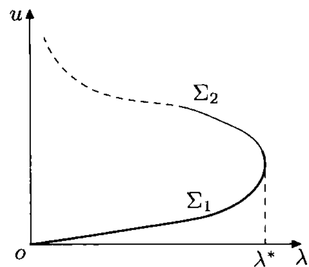


图 3.1: 极小与非极小解

在本节的第二、第三目，我们将用变分法讨论当 $0 < \lambda < \lambda^*$ 时非极小解的存在性.

二、非线性特征值问题

设 Ω 是 $n \ge 3$ 维有界光滑区域，λ 是实参数. 讨论非线性特征值问题:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda(1+u)^{N-1} && \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u &> 0 && \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u &= 0 && \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{aligned} \tag{3.61}$$

定理 3.16 *存在 $\lambda^* \in (0, \infty)$ 使得当 $\lambda > \lambda^*$ 时问题 (3.60) 无解，当 $\lambda = \lambda^*$ 时问题 (3.60) 有唯一解，而当 $0 < \lambda < \lambda^*$ 时问题 (3.60) 至少有两解.*

证明 由定理 3.15 知，存在 $\lambda^* > 0$，使得当 $\lambda > \lambda^*$ 时问题 (3.61) 无解，当 $\lambda = \lambda^*$ 时问题 (3.61) 有唯一解，而对于每一个 $\lambda \in (0, \lambda^*)$，问题 (3.61) 都有一个稳定的极小解 $\underline{u} = u_\lambda$.

对于每一个固定的 $\lambda \in (0, \lambda^*)$，问题 (3.61) 的非极小解 u 必具如下形式:

$$u = u_\lambda + v, \quad v > 0 \text{ 于 } \Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3.62}$$

因此 v 在 Ω 上满足

$$-\Delta v = \lambda(1 + \underline{u} + v)^{N-1} - \lambda(1 + \underline{u})^{N-1},$$

上述方程可整理成如下形式

$$-\Delta v = \lambda v^{N-1} + h(x, v), \tag{3.63}$$

其中 $h(x, v) = \lambda(1 + \underline{u} + v)^{N-1} - \lambda(1 + \underline{u})^{N-1} - \lambda v^{N-1}$.

方程 (3.63) 两边乘以 $\mu = \lambda^{1/(N-2)}$，并记 $w = \mu v$，则问题 (3.61) 非极小解的存在性化归为求解下列边值问题:

$$\begin{aligned} -\Delta w &= w^{N-1} + f(x, w) && \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ w &> 0 && \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ w &= 0 && \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{aligned} \tag{3.64}$$

其中 $f(x, w) = \mu h(x, \mu^{-1} w)$.

容易验证，$f(x, w)$ 满足基本假设条件 (f_1)—(f_3) (见 p.78)，这里 $a(x) = \lambda(N-1)(1 + u_\lambda(x))^{N-2}$. 根据定理 3.15，$-(\Delta + a)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上强制，从而 (f_4) 亦成立. 此外，当 $w \to \infty$ 时一致地有

$$\lim_{w\to\infty} \frac{f(x, w)}{w^{N-2}} = \mu \lim_{v\to\infty} v\left[\left(1 + \frac{1 + \underline{u}}{v}\right)^{N-1} - 1\right] = \mu'(1 + \underline{u}) \geq \mu'.$$

其中 $\mu' = (N-1)\mu$. 根据推论 3.14，问题 (3.64) 存在解 $w > 0$. □

三、Ambrosetti-Prodi 问题

设 Ω 是 $n \geq 3$ 维有界光滑区域. 讨论下列 Ambrosetti-Prodi 问题:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= u^{N-1} + \lambda h && \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u &> 0 && \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u &= 0 && \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{aligned} \tag{3.65}$$

其中 $h(x)$ 是 $\overline{\Omega}$ 上的非负 Hölder 连续函数，$h(x) \not\equiv 0$. 我们有 (参见作者 Wang [205] 及 Aubin-Wang [10])

定理 3.17 存在 $\lambda^* \in (0, \infty)$ 使得当 $\lambda > \lambda^*$ 时问题 (3.65) 无解，当 $\lambda = \lambda^*$ 时问题 (3.65) 有唯一解，而当 $0 < \lambda < \lambda^*$ 时问题 (3.65) 至少有两解.

证明 设 $\lambda \in (0, \lambda^*)$. 与前一目类似，我们寻找问题 (3.65) 如下形式的非极小解：

$$u = u_\lambda + v, \quad v > 0 \text{ 于 } \Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.62}$$

其中 u_λ 是问题 (3.65) 的极小解 (其存在性由定理 3.15 保证). v 满足

$$-\Delta v = (\underline{u} + v)^{N-1} - \underline{u}^{N-1} \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}.$$

其中 $\underline{u} = u_\lambda$. 这样，问题 (3.65) 非极小解的存在性化归为求解下列边值问题：

$$\begin{aligned} -\Delta v &= \lambda v^{N-1} + f(x, v) && \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ v &> 0 && \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ v &= 0 && \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{aligned} \tag{3.66}$$

其中 $f(x, v) = (v + \underline{u})^{N-1} - \underline{u}^{N-1} - v^{N-1}$.

容易验证，$f(x, w)$ 满足基本假设条件 (f_1)—(f_3) (见 p.78)，这里 $a(x) = (N-1)u_\lambda^{N-2}(x)$. 根据定理 3.15，$-(\Delta + a)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上强制，从而 (f_4) 亦成立. 此外，当 $v \to \infty$ 时，在任一闭球 $\bar{B} \subset \Omega$ 上一致地有

$$\lim_{v\to\infty} \frac{f(x, v)}{v^{N-2}} = \lim_{v\to\infty} v\left[\left(1 + \frac{\underline{u}}{v}\right)^{N-1} - 1\right] = (N-1)\underline{u}.$$

根据极大值原理，$\min_{\bar{B}} \underline{u} \geq C > 0$. 应用推论 3.14，我们获得问题 (3.66) 的一个正解 $v > 0$. □

注记 3.3 赵培浩与钟承奎 Zhao-Zhong [216] 考虑了次线性扰动，在 (3.65) 中将 h 换作 u^β $(0 < \beta < 1)$，得到与 Ambrosetti-Prodi 型问题类似的结论.



平均曲率型问题

第四章 古典 PLATEAU 问题

从本章开始，讨论与平均曲率密切相关的一个问题：给定一个 $\mathbb{R}^3$ 中光滑的实函数 H，寻找一个曲面 $\mathfrak{M}$，使得 $\mathfrak{M}$ 上任一点 P 的平均曲率恰好是 $H(P)$. 这样的问题称为*设定平均曲率问题* (prescribed mean curvatrue). 若进一步要求曲面由给定的空间简单闭曲线 Γ 张成，这样的问题现在通称为 Plateau 问题. 当平均曲率 $H=0$ 时，$\mathfrak{M}$ 是极小曲面，这正是经典的 Plateau 问题.

早在 1760 年，Lagrange 便导出了 图的极小曲面方程. 图指的是二元函数的图像. 不久发现了极小曲面的例子，悬链面和螺旋面. 到 1865 年，经过 Riemann，Weierstraß，Enneper 及 Schwarz 等数学家的努力，发现了更多的极小曲面的例子. 在同一时期，比利时数学家 Plateau 通过实验，认为肥皂泡是极小曲面的一种完美的物理实现，并建议数学家研究 *Plateau* 问题，即证明：

给定 $\mathbb{R}^3$ 中任意简单闭曲线 Γ，都 (至少) 有一个由 Γ 张成的极小曲面.

这个问题到 1932 年才分别由 Douglas 和 Rado 独立解决. 本章将介绍 Douglas 和 Rado 在经典 Plateau 问题方面的工作.

第一节 平均曲率及相关问题

本节先回顾曲面的几个基本概念：第一、第二基本齐式，平均曲率与 Gauss 曲率. 然后提出与平均曲率密切相关的一些问题. 并导出其分析表达.

一、平均曲率

设 $\mathfrak{M}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的 C^2 曲面，$P_0 \in \mathfrak{M}$ 是一固定点，我们说 $u=u(x,y)$ 是 P_0 点的一个局部参数表示，如果 u 是从 $\mathbb{R}^2$ 的单位圆盘 Ω 到 P_0 的某个邻域 N 的 C^2 微分同胚，$u(0)=P_0$.

我们说 $P = u(x,y)$ 是 $\mathfrak{M}$ 的正则点，如果外积 $u_x \wedge u_y \neq 0$. 显然，在正则点 $P = u(x,y)$ 处，曲面的单位法向量为

$$\vec{n} = \frac{u_x \wedge u_y}{|u_x \wedge u_y|}.$$

设 $\gamma : (-1,1) \to \mathfrak{M}$ 是曲面 $\mathfrak{M}$ 上的任一曲线，在局部参数下，$\gamma(t) = u(x(t), y(t))$. 无穷小切向量 $\mathrm{d}\gamma$ 的平方 $I \triangleq \mathrm{d}\gamma \cdot \mathrm{d}\gamma$ 称为曲面 $\mathfrak{M}$ 的 *第一基本齐式*. 局部参数表示为

$$I = E\mathrm{d}x^2 + 2F\mathrm{d}x\mathrm{d}y + G\mathrm{d}y^2,$$

其中

$$E = |u_x|^2, \quad F = u_x \cdot u_y, \quad G = |u_y|^2$$

称为曲面的 *第一类基本量*.

第一基本量反映的是曲面的内蕴性质.

切向量 $\mathrm{d}\gamma$ 的微分 $\mathrm{d}^2\gamma$ 与法向量 $\vec{n}$ 的数量积 $II \triangleq \mathrm{d}^2\gamma \cdot \vec{n}$ 称为曲面 $\mathfrak{M}$ 的 *第二基本齐式*. 局部参数表示为

$$II = L\,\mathrm{d}x^2 + 2M\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + N\,\mathrm{d}y^2,$$

其中

$$L = u_{xx} \cdot \vec{n}, \quad M = u_{xy} \cdot \vec{n}, \quad N = u_{yy} \cdot \vec{n}.$$

第二基本齐式是曲面 $\mathfrak{M}$ 上，在 $\mathrm{d}\gamma$ 方向上，邻近 P_0 的点到该点切平面的有向距离的逼近. 两个基本齐式之比

$$\frac{II}{I} = \frac{\mathrm{d}^2\gamma \cdot \vec{n}}{\mathrm{d}\gamma \cdot \mathrm{d}\gamma} = \frac{\mathrm{d}^2\gamma}{\mathrm{d}s^2} \cdot \vec{n} = \frac{L\mathrm{d}x^2 + 2M\mathrm{d}x\mathrm{d}y + N\mathrm{d}y^2}{E\mathrm{d}x^2 + 2F\mathrm{d}x\mathrm{d}y + G\mathrm{d}y^2}$$

只与微商 $\frac{dy}{dx}$ 有关，与 $\mathrm{d}\gamma$ 的长度及曲线 γ 的选择无关，因而只是切方向的函数. 过 P_0 作一个以切向量 $\mathrm{d}\gamma$ 及单位法向量 $\vec{n}$ 张成的平面 π，平面 π 在曲面 $\mathfrak{M}$ 上截得一条曲线，称为 *法截线*，它以 $\mathrm{d}\gamma$ 为切线. 索性视 γ 为这条截线，那么 γ 的主法矢 β 与 $\vec{n}$ 平行，若记 κ 为法截线 γ 在 P_0 处的曲率，根据 Frenet 公式，$\frac{\mathrm{d}^2\gamma}{\mathrm{d}s^2} = \kappa\beta$，故 $\kappa = |\frac{II}{I}|$. 我们称

$$\kappa_n = \frac{II}{I} = \frac{L\mathrm{d}x^2 + 2M\mathrm{d}x\mathrm{d}y + N\mathrm{d}y^2}{E\mathrm{d}x^2 + 2F\mathrm{d}x\mathrm{d}y + G\mathrm{d}y^2} \tag{4.1}$$

为曲面在 P_0 点沿所取方向的 *法曲率*.

对于 $\mathfrak{M}$ 上固定的点 P，κ_n 仅是切方向的函数，它不仅反映了曲面在这一点处沿此切向的弯曲程度，而且也指出了弯曲方向. 容易证明：在曲面的每一点，总有两个切向使得 κ_n 分别达到其最大值和最小值，且这两个切向彼此垂直（见图 4.1）. 这两个切方向称作曲面在该点的 *主方向*，相应的两个法曲率称为曲面在该点的 *主曲率*，记为 κ_1 及 κ_2. 我们将该点的两个主曲率的乘积 $K = \kappa_1\kappa_2$ 叫做 *Gauss 曲率*或 *全曲率*；而将这两个主曲率的算术平均 $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ 叫做 *平均曲率*或 *中曲率*.

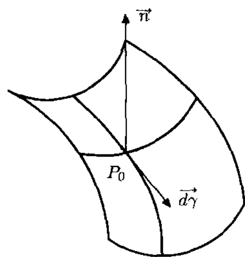


图 4.1: 主曲率

现在我们导出 Gauss 曲率及平均曲率的表达式. 在法曲率的表达式 (4.1) 中记 $\frac{dy}{dx} = \mu$，则 $\kappa_n = \kappa_n(\mu)$ 且

$$\kappa_n(E + 2F\mu + G\mu^2) = L + 2M\mu + N\mu^2.$$

上式关于 μ 求导，并注意 κ_n 的最大值及最小值是其逗留值 (临界值)，这样

$$(F + G\mu)\kappa_n = M + N\mu, \tag{4.2}$$

同样的道理，若记 $\frac{dx}{dy} = \lambda$，则有

$$(F + E\lambda)\kappa_n = M + L\lambda, \tag{4.3}$$

利用关系 $\lambda\mu = 1$，由 (4.2) 及 (4.3) 消去 λ, μ 得

$$(EG - F^2)\kappa_n^2 - (EN - 2FM + GL)\kappa_n + (LN - M^2) = 0,$$

因而 κ_n 的最大值及最小值 κ_1, κ_2 是上述二次方程的根. 由韦达定理，Gauss 曲率为

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

平均曲率为

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}. \tag{4.4}$$

注意 K 与 H 不依赖于参数的选择.

如果 $\mathfrak{M}$ 有一个几何实现，即 $\mathfrak{M}$ 是平面区域 Ω 上 C^2 函数 $z=f(x,y)$ 的图象，则 Gauss 曲率为

$$K=\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{1+|\nabla f|^2},$$

而平均曲率则有如下表达

$$H=\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{2\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right). \tag{4.5}$$

需要指出的是，与平均曲率不同，虽然 Gauss 曲率也是用第一基本齐式与第二基本齐式表达，但实质上不依赖于第二基本齐式，只与第一基本齐式有关．这一点是所谓 *Gauss 绝妙定理*肯定了的 (见 Marcel Berger [40]).

一般来说，平均曲率反映的是曲面的外在性质，它与曲面在空间中的嵌入方式有关．与平均曲率不同，Gauss 曲率反映的是曲面的内蕴几何性质，当讨论的问题只涉及曲面的内在几何特性时，便考虑 Gauss 曲率．

二、共形参数表示及 H-系统

1. 共形参数表示.　对于平均曲率型问题，采用共形参数表示自有其便利之处，因为这样导出的问题在表达形式上简单，故有较好的分析工具来处理．

设 $\mathfrak{M}$ 是二维正则曲面，我们说 $\mathfrak{M}$ 的局部参数表示 $u:N\to\mathfrak{M}$ 是共形的，如果平面区域 N 中任意两条曲线的交角在映射 u 下保持不变．

u 是 $\mathfrak{M}$ 的共形参数表示，等价于说，在此参数表示下，$\mathfrak{M}$ 的度量 (第一基本齐式) 是欧氏度量的倍数，$I=\lambda(x,y)(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)$，即 $E=G,\ F=0$，亦即

$$|u_x|^2-|u_y|^2=0=u_x\cdot u_y. \tag{4.6}$$

常常将上述共形条件写成复数形式，

$$\omega(u)\triangleq|u_x|^2-|u_y|^2-2iu_x\cdot u_y=0, \tag{4.7}$$

$\omega(u)$ 叫做 u 的 Hopf 导数，它的模 $|\omega(u)|$ 衡量参数曲面 u 的共形程度．

可以证明，任何二阶光滑的正则曲面都有局部共形参数表示 (见 Kreyszig [127], 石原繁 [239] 或王幼宁 [245]).

在共形参数表示下，曲面的面积及封闭曲面所包围的体积都有较简单的表达式．

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一有界区域，映射 $u:\Omega \to \mathfrak{M}$ 是曲面 $\mathfrak{M} \subset \mathbb{R}^3$ 的一个参数表示，则易见曲面 $\mathfrak{M}$ 的面积

$$A(u) = \int_\Omega |u_x \wedge u_y| \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

如果参数表示 u 还是 共形的，则这个面积与下列*Dirichlet* 积分一致：

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4.8}$$

在共形参数下，封闭曲面的体积也有简洁的表达.

设紧致曲面 $\mathfrak{M}$ 具有参数表示：$u:\mathbb{S}^2 \to \mathfrak{M}$，$\mathbb{S}^2$ 是标准的二维球面. 通过球极投影，$\mathbb{S}^2$ 等同于一点紧致化平面 $\widehat{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. 现设 $u:\widehat{\mathbb{R}}^2 \to \mathfrak{M}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的共形参数表示，那么 $\mathfrak{M}$ 的（代数）体积为

$$V(u) = \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}^2} u\cdot(u_x \wedge u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. H-系统及其相关问题.

对于共形参数曲面 $u = u(x,y)$，由 (10.29) 得，$H = (L+N)/2E$，即

$$H = \frac{\Delta u\cdot\vec{n}}{2|u_x|^2} = \frac{\Delta u\cdot\vec{n}}{2|u_y|^2}. \tag{4.9}$$

对共形条件 (4.7) 关于 x, y 分别求导可得 $u_x\cdot\Delta u = u_y\cdot\Delta u = 0$，故 $\Delta u = \lambda\vec{n}$，又根据 (4.7)，$|u_x \wedge u_y| = |u_x|^2 = |u_y|^2$，于是由 (4.9) 推得

$$\Delta u = 2H(u)u_x \wedge u_y, \quad (x,y)\in\Omega. \tag{4.10}$$

方程组 (4.10) 通常称为 H-系统，或 H-方程组，其几何意义是：假定参数方程 $u = u(x,y)$ 是曲面 $\mathfrak{M}$ 的共形参数表示，则在 $\mathfrak{M}$ 的正则点 u，标量 $H(u)$ 恰好是曲面的平均曲率.

方程组 (4.10) 是本章及下章讨论的中心. 现介绍与此密切相关的一些问题.

极小曲面问题. 与平均曲率有关的最著名的几何问题便是所谓 极小曲面问题.

定义 4.1 二维正则曲面 $\mathfrak{M} \subset \mathbb{R}^3$ 称为极小曲面，如果在其上每一点平均曲率 $H = 0$.

之所以将平均曲率为零的曲面叫做极小曲面是因为有下列

命题 4.1 二维正则曲面 $\mathfrak{M} \subset \mathbb{R}^3$ 是极小曲面的充分必要条件是，存在 $\mathfrak{M}$ 的一个参数表示 $u : \Omega \to \mathfrak{M}$，使得 u 是面积泛函 $A(u)$ 的临界点.

设定平均曲率问题. 给定 $\mathbb{R}^3$ 中一个函数 $H(P)$，求曲面 $\mathfrak{M}$，使得 $\mathfrak{M}$ 上任意一点 P 处的平均曲率恰好是 $H(P)$. 通常需对 $\mathfrak{M}$ 附加边界或拓扑条件.

第二节　古典PLATEAU问题

经典的 Plateau 问题是关于极小曲面的.

设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ 是一 *Jordan* 闭曲线，也就是说，存在一一对应的映射 $\alpha : \partial\Omega \to \mathbb{R}^3$ 使得 $\Gamma = \alpha(\partial\Omega)$，并且

$$\alpha \in C(\partial\Omega; \mathbb{R}^3) \cap H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{R}^3). \tag{4.11}$$

这里，$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是中心在原点的单位圆盘. 用 Σ_Γ 表示以 Γ 为边界的曲面构成的集合. 问 Σ_Γ 中是否存在面积最小的曲面 $\mathfrak{M}$? 或者问，在 Σ_Γ 中是否存在曲面 $\mathfrak{M}$，其面积是 Σ_Γ 中诸面积的临界值? 根据上一节的准备，问题相当于

$$\text{求曲面 } \mathfrak{M} \text{ 使得 } \partial\mathfrak{M} = \Gamma \text{ 且平均曲率 } H = 0. \tag{P$_m$}$$

一、解析表达

现在设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆盘，又设 $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ 是 $\mathfrak{M}$ 的共形参数表示，u 在 Ω 内具有连续的二阶偏导数，在边界 $\partial\Omega$ 上连续. 根据 (4.10)，平均曲率 $H = 0$ 相当于

$$\Delta u = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}. \tag{L}$$

仍记 $\omega(u)$ 为 u 的 Hopf 导数，则共形条件等价于

$$\omega(u) = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}. \tag{K}$$

最后考虑边界条件 $u(\partial\Omega) = \Gamma$. 由于技术原因，对 u 的边界取值附加 单调的限制条件.

定义 4.2 一个映射 $\phi: \partial\Omega \to \Gamma \subset \mathbb{R}^3$ 在 $\partial\Omega$ 上单调，意指

$$(\, p \in \Gamma\,) \Longrightarrow (\text{ 集合 } \phi^{-1}(p) \text{ 连通 }).$$

现在，古典 Plateau 问题可用解析式表达为

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0 \qquad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ &\omega(u) = 0 \qquad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ &u(\partial\Omega) = \Gamma,\ u \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上单调连续}. \end{aligned} \tag{LP}$$

通常将上述问题中的共形条件与边界条件合起来称作 Plateau 条件.

在问题 (LP) 中，Laplace 方程是一个典型的方程，但边界条件却有点异于寻常. 此外，还需顾及非线性的共形条件 (K)，这正是困难所在.

二、Douglas-Radó 方法

解决问题 (LP) 的第一步是将其化为一个变分问题. 记 $H^1 = H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$，并令

$$H_\Gamma = \{v \in H^1 : v(\partial\Omega) = \Gamma, \quad v \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上单调连续}\}. \tag{4.12}$$

现在，考虑极值问题

$$\inf\{E(u) : u \in H_\Gamma\}, \tag{4.13}$$

其中 $E(u)$ 是 Dirichlet 积分:

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad u \in H_\Gamma.$$

根据一般的极值理论，如果 u 是极值问题 (4.13) 的解，则 u 必然满足 Laplace 方程 $\Delta u = 0$. 然而，最令人惊异的是，这一事实 (u 是极值问题 (4.13) 的解) 也隐含了共形条件 (K).

1. 关于区域的变分.

我们知道，极值问题 (4.13) 的解必然满足 Laplace 方程. 而下列引理断言，共形条件 (K) 是极值问题 (4.13) 解的自然推论.

引理 4.2 若 $u \in H_\Gamma$ 是极值问题 (4.13) 的解，则 u 也是 Plateau 问题 (LP) 的解.

证明 由于 u 是泛函 $E(v)$ 的极小点，因而满足 Laplace 方程

$$\Delta u = 0 \quad 在\,\Omega\,中.$$

根据正则化理论 (见本章末)，$u \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$.

为证 u 共形，考虑泛函 $E(u)$ 的另一种变分，区域的变分. 设 $\overrightarrow{Z} = (X, Y) \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ 是任一向量场且在边界 $\partial\Omega$ 上，$\overrightarrow{Z} \cdot \vec{n} = 0$. 令

$$\phi_t(z) = z + t\overrightarrow{Z}(z), \tag{4.14}$$

则对于 $|t| > 0$ 充分小，$\phi_t : \Omega \to \Omega$ 是微分同胚.

确实，直接可验证，当 $|t| < \varepsilon = \sup_\Omega |\nabla \overrightarrow{Z}|$ 时，ϕ_t 是单映射. 应用拓扑度理论中的锐角原理或者 Krasnosel'skii 定理（见陈 [219]），可证 ϕ_t 是满映射.

锐角原理: 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集, $o \in \Omega$. 设 $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ 连续. 若内积 $\langle f(x), x\rangle > 0$ 对所有 $x \in \partial\Omega$ 成立, 则 $\deg(f, \Omega, 0) = 1$ (从而 $f(x) = 0$ 在 Ω 内有解).

Krasnosel'skii 定理: 设 Ω 是内积空间 E 中的开集, $o \in \Omega$. 设 $F : \Omega \to E$ 全连续. 若内积 $\langle F(x), x\rangle \le \|x\|$ 对所有 $x \in \partial\Omega$ 成立, 则 F 在 $\overline{\Omega}$ 上必有不动点.

令 $u^t = u \circ \phi_t$，则 $u^t \in H_\Gamma$. 又 $t = 0$ 时 $E(u^t)$ 取极小值 $E(u)$，故

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E(u^t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_\Omega |\nabla u^t|^2 = 0. \tag{4.15}$$

直接计算得

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} |\nabla u^t|^2 = \mathrm{div}\left(\vec{Z}|\nabla u|^2\right) + (X_x - Y_y)(u_x^2 - u_y^2) + 2(X_y + Y_x)u_x \cdot u_y.$$

因在 $\partial\Omega$ 上 $\vec{Z} \cdot \vec{n} = 0$，应用散度定理，(4.15) 变为

$$\int_\Omega \left(|u_x|^2 - |u_y|^2\right)(X_x - Y_y) + 2\int_\Omega u_x \cdot u_y\,(Y_x + X_y) = 0. \tag{4.16}$$

1° 对于任意 $X, Y \in C_0^\infty(\Omega)$ 上式成立. 若将 (4.16) 中的 (X, Y) 用 $(Y, -X)$ 代换，则有

$$\int_\Omega \left(u_x^2 - u_y^2\right)(Y_x + X_y) - 2\int_\Omega u_x \cdot u_y\,(X_x - Y_y) = 0. \tag{4.17}$$

如果我们将 $\vec{Z}$ 写成复数形式 $X+iY$，则 (4.16) 及 (4.17) 左边被积函数恰好分别是 $2\omega(\partial Z/\partial\bar{z})$ 的实部和虚部，因此

$$\int_\Omega \omega\frac{\partial Z}{\partial\bar{z}}=0,\quad \forall\, Z\in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{C}).$$

故在 Ω 上，u 的 Hopf 导数 $\omega=\text{const.}$.

2° 在 (4.16) 中取 $(X,Y)=(xy^2,-x^2y)$，可得

$$\int_\Omega(\Re\omega)(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,$$

从而 $\Re\,\omega=0$. 接着，在 (4.16) 中取 $(X,Y)=(yx^2,-x^3)$，可得 $\Im\,\omega=0$. □

2. **共形不变性.**

根据引理 4.2，求解问题 (LP) 等价于求解如下极值问题：

$$\text{求 } u\in H_\Gamma \text{ 使得 } E(u)=\inf\{E(v):v\in H_\Gamma\}. \tag{4.18}$$

解决问题 (4.18) 最大的困难是它的极小化序列未必在 H_Γ 中相对列紧，其原因是问题 (4.18) 具有共形不变性.

用 G 表示 Ω 上共形变换全体构成的群，

$$G=\{\phi\in C^1(\Omega,\Omega):\phi\text{ 一一映上, }\omega(\phi)=0\},$$

其中 $\omega(\phi)$ 表示 ϕ 的 Hopf 导数. 则 Dirichlet 泛函 $E(u)$ 在群 G 的作用下不变，即

$$E(u)=E(u\circ\phi),\quad \forall\,\phi\in G. \tag{4.19}$$

我们顺便指出，体积积分 $V(u)$ 也是共形不变的，但 $V(u)$ 在更大的群 H ——保定向的 C^1 微分同胚构成的群作用下不变，

$$V(u)=V(u\circ\phi),\quad \forall\,\phi\in H. \tag{4.20}$$

这些事实只不过是二重积分的换元积分法.

根据复变函数论，G 的元素是解析函数或其共轭，选择一定的定向，可只取解析函数，此时任意 $\phi\in G$ 必然是分式线性函数，且

$$\phi=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}e^{i\theta},\quad a\in\Omega,\ \theta\in[0,2\pi).$$

因而 $G \cong \Omega \times \mathbb{S}^1$，一个带边的非紧致的三维流形. 注意，在共形变换 $G \ni \phi: \Omega \to \Omega$ 下，ϕ 将边界 $\partial\Omega$ 连续地一一映照为自身，故

$$u \in H_\Gamma,\ \phi \in G \Longrightarrow u \circ \phi \in H_\Gamma.$$

由于共形不变性，H_Γ 在 H^1 中不弱列闭. 事实上，对于任意 $u \in H_\Gamma \cap C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$，取 $z_k \in \Omega$ 使得 $z_k \to a \in \partial\Omega$，则 $|a| = 1$，令

$$\phi_k(z) = -\frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z},$$

那么 $u \circ \phi_k \xrightarrow{p.p.} u(a)$ 于 Ω 中，且 $u \circ \phi_k \overset{w}{\rightharpoonup} u(a)$ 于 H^1 中. 但 $u(a) \notin H_\Gamma$. 故 H_Γ 在 H^1 中不弱列闭.

3. **三定点条件**.

为消除共形不变性带来的困难，须在 H_Γ 上引入一个规范，对于每个 $u \in H_\Gamma$，在由 G 生成的轨道 $\{u \circ \phi : \phi \in G\}$ 上选择一个特殊的代表，使得该代表将圆周 $\mathbb{S}^1$ 上的三个固定点 $\zeta_k = e^{2k\pi i/3}$ $(k = 1, 2, 3)$ 对应地映成 Γ 上的三个固定点. 为此，取 Γ 的一个固定的单调参数表示 $\gamma \in C(\mathbb{S}^1, \Gamma)$，然后令

$$H_\Gamma^* = \left\{u \in H_\Gamma : u(\zeta_k) = \gamma(\zeta_k) \triangleq \omega_k,\ k = 0, 1, 2\right\}.$$

因为 $H_\Gamma^* \subset H_\Gamma$，且对于任意 $u \in H_\Gamma$，存在一个 $\phi \in G$ 使得 $u \circ \phi \in H_\Gamma^*$，因此，根据泛函 $E(u)$ 的共形不变性，我们有

命题 4.3 $$\inf\{E(u) : u \in H_\Gamma\} = \inf\{E(u) : u \in H_\Gamma^*\}.$$

因此，要解决 Plateau 问题，只须求解极值问题

$$\inf\{E(u) : u \in H_\Gamma^*\}. \tag{4.21}$$

用 H_Γ^* 而不用 H_Γ 的好处，在于下列命题.

定理 4.4 H_Γ^* 在 $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ 中弱列闭.

证明定理 4.4 的关键是下列 Courant-Lebesgue 引理.

引理 4.5 (Courant-Lebesgue) 设 $u \in H^1$, $z_0 \in \bar{\Omega}$, 那么对于任意 $\delta \in (0, 1)$, 存在 $\rho \in [\delta, \sqrt{\delta}]$, 使得在 $C_\rho \triangleq \partial B_\rho(z_0) \cap \Omega$ 上有 $|\frac{\partial}{\partial s}u| \in L^2(C_\rho)$, 且

$$\int_{C_\rho} \left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2 \mathrm{d}s \leq \frac{4E(u)}{\rho|\log\rho|},$$

其中 $\mathrm{d}s$ 表示弧长元素, $E(u)$ 是 Dirichlet 积分.

证明 用反证法. 假定不等式对某个 $\delta_0 \in (0, 1)$ 不正确，那么对所有 $\rho \in [\delta_0, \sqrt{\delta_0}]$ 将成立

$$\frac{4E(u)}{\rho|\log\rho|} < \int_{C_\rho} \left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2 \mathrm{d}s.$$

将上式两端上关于 ρ 在 $[\delta_0, \sqrt{\delta_0}]$ 上积分，得

$$(4\log 2)E(u) < \int_{\delta_0}^{\sqrt{\delta_0}} \int_{C_\rho} \left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}\rho \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 \leq 2E(u),$$

这就导致 $2\log 2 < 1$，显然是个矛盾. □

设 $b > 0$ 是一实数，令

$$K_b^* = \{u \in H_\Gamma^* : E(u) \leq b\}, \quad K_{b,\partial\Omega}^* = \{u|_{\partial\Omega} : u \in K_b^*\}.$$

我们有

引理 4.6 $K_{b,\partial\Omega}^*$ 是等度连续的.

证明 设 δ_0, $\varepsilon_0 > 0$ 是这样两个常数，使得 $\mathbb{R}^2$ 中以 $\sqrt{\delta_0}$ 为半径的任意圆盘内至多只含三个固定点 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ 中的一个，$\mathbb{R}^3$ 中以 ε_0 为半径的任意球内至多只含 Γ 上三个固定点 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 中的一个，参见图 4.2.

给定 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，由于 Γ 的紧致性及连续性，我们可选适当小的正数 $\varepsilon_1 < \varepsilon$，使得

$$(P_1, P_2 \in \Gamma,\ |P_1 - P_2| < \varepsilon_1) \implies (\text{弧 } \Gamma_{P_1P_2} \text{ 包含于某球 } B_\varepsilon). \tag{4.22}$$

其中 $\Gamma_{P_1P_2}$ 表示 Γ 上联结 P_1P_2 的劣弧. 现在，根据以上所取 ε_1，选 $0 < \delta \leq \delta_0$ 充分小，使得

$$8\pi b < \varepsilon_1^2|\log\delta|.$$

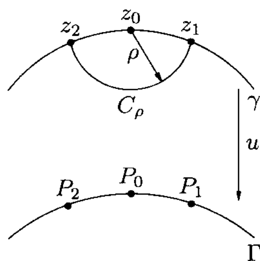


图 4.2: 引理4.6图

设 $u \in K_b^*$, $z_0 \in \partial\Omega$. 对所取 δ, 根据 Courant-Lebesgue 引理, 有 $\rho \in [\delta, \sqrt{\delta}]$ 使得在以 z_0 为中心, ρ 为半径的部分圆周 C_ρ 上, $\int_{C_\rho} \left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2 \mathrm{d}\, s \le \frac{4E(u)}{\rho|\log\rho|}$.

记 z_1, z_2 为 $\partial\Omega$ 与 $C_\rho(z_0)$ 的交点, 并记 $u(z_0)$, $u(z_1)$, $u(z_2)$ 分别为 P_0, P_1, P_2. 由 (4.22) 及 Hölder 不等式得

$$
\begin{aligned}
|P_2 - P_1|^2 &\le \left(\int_{C_\rho} \left|\frac{\partial u}{\partial s}\right| \mathrm{d}\, s\right)^2 \\
&\le \pi\rho \int_{C_\rho} \left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2 \mathrm{d}\, s \le 4\pi E(u)/|\log\rho| \\
&\le 8\pi E(u)/|\log\delta| \le \varepsilon_1^2.
\end{aligned}
$$

故 $\Gamma_{P_1P_2}$ 包含在某个半径为 ε 的球 B_ε 内. 由映射 $u|_{\partial\Omega}$ 的单调性及 "三定点条件", 映射 $u|_{\partial\Omega}$ 将劣弧 $\widehat{z_1z_2}$ 映入劣弧 $\Gamma_{P_1P_2}$, $u(\widehat{z_1z_2}) \subset \Gamma_{P_1P_2}$, 特别地

$$
|u(z) - u(z_0)| \le 2\varepsilon, \quad \forall\, z \in \partial\Omega \cap B_\delta(z_0).
$$

这样便证明了 $K_{b,\partial\Omega}^*$ 等度连续. □

定理 4.4 的证明 为证 H_Γ^* 在 H^1 中弱列闭, 设序列 $\{u_n\} \subset K_b^*$ 弱收敛于 $u \in H^1$. 根据引理 4.6, $\{u_n|_{\partial\Omega}\} \subset K_{b,\partial\Omega}^*$ 等度连续, 因而由 Ascoli-Arzela 定理 (紧集上一致有界且等度连续的函数族列紧), 可抽得子列 $\{u_j\}$, 使得 $u_j|_{\partial\Omega}$ 一致收敛于 $u|_{\partial\Omega}$. $u|_{\partial\Omega}$ 连续, 单调 (单调列的极限仍单调). 又显然有 $u(\partial\Omega) = \Gamma$. 故 $u \in H_\Gamma^*$. □

4. **Plateau 问题的解决.**

我们把古典 Plateau 问题的解决归结为以下的定理 4.7.

定理 4.7 *存在 $\bar{u} \in H_\Gamma^*$ 使得 $E(\bar{u}) = \inf_{u \in H_\Gamma^*} E(u)$. 进而, $\bar{u} \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 是 Plateau 问题 (LP) 的解.*

证明 设 $u_n \in H_\Gamma^*$ 是一极小化序列，使得

$$E(u_n) = \inf_{u \in H_\Gamma^*} E(u) + o(1).$$

现在，问题的关键在于 u_n 未必在 H^1 中有界. 我们转而考虑另一极小化序列. 令 $\bar{u}_n$ $(n \geq 1)$ 是下列问题的唯一解:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{u}_n &= 0, \qquad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ \bar{u}_n &= u_n, \qquad \text{在 } \partial\Omega \text{ 中}. \end{aligned}$$

则 $E(\bar{u}_n) \leq E(u_n)$，这是因为，根据 Green 公式，

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla \bar{u}_n|^2 &= \int_{\partial\Omega} \bar{u}_n \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial \nu} = \int_{\partial\Omega} u_n \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial \nu} = \int_\Omega \nabla \bar{u}_n \cdot \nabla u_n \\ &\leq \left(\int_\Omega |\nabla \bar{u}_n|^2 \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

因此，$\bar{u}_n$ (显然属于 H_Γ^*) 仍是极小化序列，即

$$E(\bar{u}_n) = \inf_{u \in H_\Gamma^*} E(u) + o(1).$$

因 $\bar{u}_n$ 是调和函数，由极大值原理

$$\|\bar{u}_n\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\bar{u}_n\|_{L^\infty(\partial\Omega)} = \|u_n\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq R,$$

其中 R 是包含 Γ 的最小球的半径. 故 $\{\bar{u}_n\}$ 在 H^1 中有界，因而有子列 (仍记为 $\bar{u}_n$) 在 H^1 中弱收敛于某个 $\bar{u} \in H^1$.

由于 H_Γ^* 弱闭，我们有 $\bar{u} \in H_\Gamma^*$. 由下半弱连续性，

$$E(\bar{u}) \leq \lim E(\bar{u}_n) = \inf_{u \in H_\Gamma^*} E(u).$$

即 $\bar{u}$ 是极值问题 (4.21)的解，从而 (由命题 4.3) 是极值问题 (4.13) 的解. 根据命题 4.2，$\bar{u}$ 是 Plateau 问题 (LP) 的弱解.

最后，讨论 $\bar{u}$ 的正则性. 现在，$\bar{u} \in H_\Gamma^*$，$\bar{u}|_{\partial\Omega} \in C(\partial\Omega)$. 根据调和函数的存在唯一性定理 (见钟玉泉 [259])，$\bar{u} \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. □

第五章　H-方程及 PLATEAU 问题

本章将讨论 H 曲面情形的 Plateau 问题. 主要介绍 Bezis-Coron [48] 的工作，同时也参阅了 Struwe [193], Bethuel-Rey [44] 及 Bethuel-Caldiroli-Guida [41] 等文献.

第一节　概 述

古典 Plateau 问题的一个自然推广是：给定 $\mathbb{R}^3$ 中的*Jordan* 闭曲线 Γ (见 110 页 (4.11) 式)，求一个由 Γ 张成的曲面，使其具有常平均曲率 $H > 0$.

根据前章第一节的讨论，这一问题相当于求一个参数曲面 $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$，使其满足 H-方程及 Plateau 条件，即

$$\begin{aligned} &\Delta u = 2H u_x \wedge u_y && \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ &\omega(u) = 0 && \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ &u(\partial\Omega) = \Gamma,\ \text{且 } u|_{\partial\Omega} \text{ 单调连续}. \end{aligned} \tag{HP}$$

在此及本章 $\omega(u)$ 表示 u 的 Hopf 导数（见 108 页 (4.6) 式)，Ω 是中心在原点的单位圆盘,

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

与前章问题 (LP) 相较，不仅共形条件 $\omega = 0$ 是非线性的，H-方程也是非线性的. 右端非线性项 $u_x \wedge u_y$ 是体积积分 $V(u)$ 的导数，由于体积积分的伸缩不变性，问题 (HP) 是临界非线性的.

一、背景

问题 (HP) 在历史上是名题. 早在 1970 年 Hildebrandt [120] 就证明，当

$$HR < 1 \quad (R \text{ 为包含 } \Gamma \text{ 的最小闭球的半径}) \tag{5.1}$$

时，问题 (HP) 至少存在一解.（在 Hildebrandt 的文章中，平均曲率可以是给定的一函数，且允许 $HR = 1$）.

另一方面，当 Γ 是一个圆时，如果 $HR > 1$，则问题 (HP) 无解 (见 Heinz [119]). 如果 $HR < 1$，容易看出问题 (HP) 存在两个解（参见图 5.1），一个是平均曲率为 H 的，由 Γ 张成的劣解 B_1，另一个是平均曲率为 H 的，由 Γ 张成的优解 B_2. 当 $HR = 1$ 时，问题(HP) 只有一解.

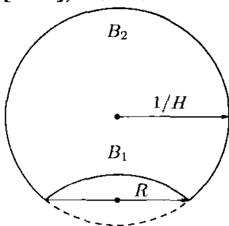


图 5.1: 优解与劣解

基于这样的观察，Rellich 猜想:

对于任意 $\mathbb{R}^3$ 中的曲线 Γ，只要 R 充分小，则问题 (HP) 至少具有两个几何不同解.

Steffen [189] 于 1972 年证明，Rellich 猜想对于一列趋于 0 的 H_n 是正确的. Brezis-Coron [31] 证明，当 $HR < 1$ 时，问题 (HP) 具有两个解. 大约同时，Struwe [193] 也独立地得到基本相同的结果.

二、解决途径概述

问题 (HP) 的解决，依赖于对更标准的问题，Dirichlet 问题的认识. 这就要求寻找一个向量值函数 $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$，使其满足 H-方程及 Dirichlet 边值条件:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 2H u_x \wedge u_y \quad && \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u &= g && \text{在 } \partial\Omega \text{ 中}. \end{aligned} \tag{HD}$$

其中 $H > 0$ 是常数，g 是 $\partial\Omega$ 上的函数，$g \in H^{1/2}(\partial\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega)$.

借助引理 5.28 提供的恒等式，体积积分 $V(u)$ 的导数为 $u_x \wedge u_y$. 故问题 (HD) 的解对应下列泛函 J 的临界点:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{2H}{3}\int_\Omega u \cdot (u_x \wedge u_y), \quad u \in H_g \cap L^\infty,$$

其中

$$H_g = \{u \in H^1 : u|_{\partial\Omega} = g\}. \tag{5.2}$$

1. Dirichlet **问题的劣解.**

不论是 Dirichlet 问题，还是 Plateau 问题，劣解的存在性，现在看来都是比较初等的．在第二节将证明，对每个 $g \in H^{1/2} \cap L^\infty(\partial\Omega)$，如果

$$HR < 1, \qquad (R = \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}) \tag{5.3}$$

则泛函 J 在

$$K_g = \{u \in H_g : \|u\|_{L^\infty} \le R'\} \tag{5.4}$$

上有一个局部极小值点 $\underline{u}^g$，即 $J(\underline{u}^g) = \inf_{u \in K_g} J(u)$，其中 $R < R' < 1/H$．这个解将称为 $(\mathrm{HD})_g$ 的劣解 (small solution) 或极小解．我们将给出极小解的一系列性质．最重要的是，极小解是稳定的，即存在 $\delta > 0$，使得 $\forall\, v \in H_0^1$，

$$T_{\underline{u}}(v) \triangleq \int |\nabla v|^2 + 4H \int \underline{u} \cdot v_x \wedge v_y \ge \delta \int |\nabla v|^2. \tag{5.5}$$

2. Plateau **问题的劣解.**

现在回顾 H_Γ (见 111 页 (4.12) 式) 及其保持三定点条件的子集 $H_\Gamma^* \subset H_\Gamma \subset H^1$．对于 Plateau 问题来说，泛函 J 在 H_Γ 上是共形不变的．我们仍用三定点条件来处理共形不变性．与 Dirichlet 问题类似，可以证明，在条件 (5.1) 下，泛函 J 在集合

$$K_\Gamma^* = \{u \in H_\Gamma^* : \|u\|_{L^\infty} < R'\} \tag{5.6}$$

上有一个局部极小值点 $\underline{u}$，即 $J(\underline{u}^g) = \inf_{u \in K_\Gamma^*} J(u)$，其中 $R < R' < 1/H$，而 R 由 (5.1) 确定．这样的 $\underline{u}$ 当然满足 (H) 方程．因体积积分

$$W(u) \triangleq 3V(u) = \int_\Omega u \cdot (u_x \wedge u_y).$$

在保定向的微分同胚 $\phi : \Omega \to \Omega$ 下不变，即

$$W(u \circ \phi) = W(u),$$

如同古典 Plateau 问题，用变分区域的方法，证明 $\underline{u}$ 满足共形条件 $\omega = 0$．

3. Dirichlet **问题的优解.**

设 $\underline{u}$ 是 (HD) 的劣解，令 $\Phi(v) = J(\underline{u} + v) - J(\underline{u})$，则

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}T(v) + \frac{2}{3}HW(v), \quad v \in H_0^1 \cap L^\infty.$$

通过如下 Wente 等周不等式，

$$S|W(v)|^{2/3} \le \|\nabla v\|_2^2, \quad \forall\, v \in H_0^1 \cap L^\infty,$$

可将体积积分 $W(v)$ 连续扩张到整个 H_0^1. 这样 Φ 是 H_0^1 上的 C^2 泛函.

让我们暂时用山路引理的观点看问题. 由于 $T(v)$ 是强制的 (由极小解 $\underset{\sim}{u}$ 的稳定性) 且是二次齐次的，$W(v)$ 是三次齐次的，Φ 具有一个自然的山路引理型结构.

但由于 $W(v)$ 具有共形不变性，Φ 不满足全局的 (P.S.) 条件. 然而，经过 Aubin [3], Brezis-Nirenberg [52], P.L. Lions [141], Brezis-Coron [48, 49] 以及 Bahri- Coron [31] 等的一系列工作，破坏泛函 Φ 的 (P.S.) 条件的值是一列离散的确定值，其中一个简单结论是：如果

$$c < S^3/(24H^2) = 4\pi/(3H^2),$$

则 Φ 满足 $(\mathrm{P.S.})_c$ 条件. 而 Φ 的山路水平 $c_g > 0$ 恰好满足这一条件. 这样用山路引理便得到 Φ 的临界点 $\bar{v}^g$，从而 $\bar{u}^g := \underset{\sim}{u}^g + \bar{v}^g$ 是 $(\mathrm{HD})_g$ 的另一解，且

$$J(\bar{u}^g) = J(\underset{\sim}{u}^g) + \Phi(\bar{v}^g),$$

我们称 $\bar{u}^g$ 为 $(\mathrm{HD})_g$ 的优解.

4. **Plateau 问题的优解.**

令 $\mathscr{C}^*$ 为 $H^{1/2}(\partial\Omega;\mathbb{R}^3)$ 中将边界 $\partial\Omega$ 映为 Γ 并且保三定点不变的单调连续映射全体，即

$$\mathscr{C}^* = \left\{u|_{\partial\Omega} : u \in H_\Gamma^*(\Omega)\right\}.$$

令

$$A(g) = J(\bar{u}^g) = J(\underset{\sim}{u}^g) + c_g, \quad g \in \mathscr{C}^*.$$

注意，$\bar{u}^g$ 不唯一，但 $J(\bar{u}^g)$ 由 g 唯一确定，因而 $A(g)$ 有明确定义. 我们将证

$$\mu := \inf_{g\in\mathscr{C}^*} A(g)$$

可被某个 $g_0 \in \mathscr{C}^*$ 取到，并且 $\tilde{u} = \bar{u}^{g_0}$ 是 Plateau 问题 (HP) 的解，而且由于 $J(\tilde{u}) > J(\underset{\sim}{u})$，$\tilde{u}$ 与 $\underset{\sim}{u}$ 是 Plateau 问题的几何不同解.

最后指出，$(\mathrm{HD})_g$ 的解属于 L^∞ (见 150 页 Wente 引理)，如果 $g \in C(\partial\Omega)$，则 $u \in C(\overline{\Omega})$. 用 Morrey 正则化，可以证明 $u \in C^\infty(\Omega)$ (见 Wente [208]).

第二节　劣解的存在性

一、Dirichlet 问题的劣解

考虑下列问题：求向量值函数 $u \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$，使其满足 H-系统及 Dirichlet 边值条件，即

$$\begin{aligned} \Delta u &= 2H u_x \wedge u_y \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u &= g \qquad\qquad\quad\ \text{在 } \partial\Omega \text{ 中}. \end{aligned} \tag{HD}$$

其中 $H > 0$ 是常数，g 是 $\partial\Omega$ 上的函数，且 $g \in H^{1/2}(\partial\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega)$.

在本节，将证明，(HD) 的变分泛函 J 在边值 g 的“附近”有一个局部极小的临界点. 为了以后讨论 Dirichlet 问题及 Plateau 问题的优解，将给出这一极小解的各种性质，尤其是极小解的稳定性.

1. 极小解的存在性.

(HD) 的变分泛函是 J (已在 120 页定义). 泛函 J 在 $H_g \cap L^\infty$ 上是下方无界的，不存在全局的极小临界点. 在条件 (5.3) 下，我们寻求 J 的局部极小点. 任取实数 R' 使得 $R < R' < 1/H$. 记

$$K = \left\{u \in H^1 : \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le R'\right\}, \tag{5.7}$$

显然 (注意 $2|u_x \wedge u_y| \le |\nabla u|^2$)

$$\frac{1}{6}\int |\nabla u|^2 \le J(u) \le \frac{5}{6}\int |\nabla u|^2, \quad \forall\, u \in K. \tag{5.8}$$

这样，J 在 K 上强制. 现在来证明

引理 5.1　$J(u)$ 在 K 上是 H^1 下半弱连续的.

证明 I　这类结论的证明，现时常用 Morrey 拟凸性 (见p.9 定理 1.10). 设 u, p_1, $p_2 \in \mathbb{R}^3$，记 $p = (p_1, p_2)$，并令

$$f(u,p) := \frac{1}{2}|p|^2 + \frac{2}{3}H u \cdot p_1 \wedge p_2,$$

则当向量 $u \in \mathbb{R}^3$, $|u| \le R'$ 时，

$$(1/6)|p|^2 \le f(u,p) \le (5/6)|p|^2.$$

此外，$f(u,p)$ 是变量 p 的凸函数，因而 Morrey 拟凸，根据定理 1.10，$J(u)$ 在 K 上是 H^1-下半弱连续的. □

证明 II 我们也可不用拟凸的概念直接证明引理 5.1. 设 u^n, $\hat{u} \in K$，且在 H^1 中，$u^n \xrightarrow{w} \hat{u}$，需证明

$$J(\hat{u}) \le \underline{\lim}\, J(u^n).$$

通过抽取子列，可设

$$\begin{aligned} &u^n \xrightarrow{w} \hat{u} \quad \text{在 } H^1 \text{ 中}, \qquad u^n \xrightarrow{w^*} \hat{u} \quad \text{在 } L^\infty \text{ 中}, \\ &u^n \xrightarrow{p.p.} \hat{u} \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \qquad J(u^n) = \underline{\lim}\, J(u^n) + o(1). \end{aligned}$$

令 $\theta^n = u^n - \hat{u}$，则 $\|\theta^n\|_\infty \le 2R'$，并且

$$\theta^n \xrightarrow{w} 0 \quad \text{在 } H^1 \text{ 中}, \qquad \theta^n \xrightarrow{p.p.} 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}.$$

我们有

$$\begin{aligned} J(u^n) = \frac{1}{2}\int\left\{|\nabla\hat{u}|^2 + |\nabla\theta^n|^2\right\} + o(1) + \\ + \frac{2H}{3}\int u^n \cdot (\underline{u}_x + \theta^n_x) \wedge (\underline{u}_y + \theta^n_y). \end{aligned} \tag{5.9}$$

我们将对 (5.9) 中有关项逐一估计. 首先，

$$\frac{2H}{3}\left|\int u^n \cdot \theta^n_x \wedge \theta^n_y\right| \le \frac{1}{3}\int |\nabla\theta^n|^2. \tag{5.10}$$

这里用到了条件 $HR < 1$. 其次，我们断言

$$\int u^n \cdot \theta^n_x \wedge \hat{u}_y = o(1). \tag{5.11}$$

事实上，由混合积的性质，

$$\int u^n \cdot \theta^n_x \wedge \hat{u}_y = -\int \theta^n_x \cdot u^n \wedge \hat{u}_y,$$

而 $\theta_x^n \xrightarrow{w} 0$ 在 L^2 中，$u^n \wedge \hat{u}_y \xrightarrow{s} \hat{u} \wedge \hat{u}_y$ 在 L^2 中 (控制收敛定理)，因此 (5.11) 成立. 类似地我们有

$$\int u^n \cdot \hat{u}_x^n \wedge \theta_y^n = o(1). \tag{5.12}$$

最后，由于 $u^n \xrightarrow{w^*} \hat{u}$ 在 L^∞ 中，我们有

$$\int u^n \cdot \hat{u}_x \wedge \hat{u}_y = \int \hat{u} \cdot \hat{u}_x \wedge \hat{u}_y + o(1). \tag{5.13}$$

由 (5.9) 出发，结合 (5.10)—(5.13)，我们有

$$J(u^n) \geq J(\hat{u}) + \frac{1}{6}\int |\nabla \theta^n|^2 + o(1),$$

故 $J(\hat{u}) \leq \underline{\lim}\, J(u^n)$. □

定理 5.2 (Hildbrandt) 设 $g \in H^{1/2} \cap C(\partial\Omega, \mathbb{R}^3)$，若 $HR < 1$，那么问题 (HD) 具有一局部极小解 $\underline{u}$，$\|\underline{u}\|_\infty \leq R$. $\underline{u}$ 是 $J(u)$ 的局部绝对极小解，即存在 $\delta > 0$ 使得

$$J(\underline{u}) \leq J(\underline{u} + v), \quad \forall\, v \in H_0^1 \text{ 且 } \|v\|_\infty \leq \delta. \tag{5.14}$$

证明 由 (5.8) 知，J 在 K_g 上强制；由引理 5.1 知，J 在 K_g 上 H^1-下半弱连续. 注意到 K_g 是 H^1 中的凸闭集，因此存在 $\underline{u} \in K_g$ 使得

$$J(\underline{u}) = \inf_{u \in K_g} J(u). \tag{5.15}$$

我们断言 $\|\underline{u}\|_\infty \leq R$，因而按一致范数 $\underline{u}$ 是 K_g 的内点，从而是 (HD) 的解.

往证 $\|\underline{u}\|_\infty \leq R$. 取 $\eta \in \mathscr{D}_+(\Omega; \mathbb{R})$，则对于 $t > 0$ 充分小，有 $\underline{u} - t\eta\underline{u} \in K_g$，而由 (5.15) 式知，$J(\underline{u}) \leq J(\underline{u} - t\eta\underline{u})$，因而

$$\begin{aligned} 0 \geq -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} J(\underline{u} - t\eta\underline{u}) &= \langle \eta\underline{u}, J'(\underline{u})\rangle \\ &= \int \nabla\underline{u}\nabla(\eta\underline{u}) + 2H\int \eta\underline{u} \cdot \underline{u}_x \wedge \underline{u}_y, \end{aligned}$$

这也就是说

$$-(1/2)\Delta|\underline{u}|^2 + |\nabla\underline{u}|^2 + 2H\underline{u} \cdot \underline{u}_x \wedge \underline{u}_y \leq 0 \quad \text{在 } \mathscr{D}'(\Omega) \text{ 中},$$

依 $\underline{u} \in K_g$ 知，$H\|\underline{u}\|_{L^\infty} \leq 1$，故

$$-\Delta|\underline{u}|^2 \leq 0 \quad \text{在 } \mathscr{D}'(\Omega) \text{ 中},$$

即 $|\underline{u}|^2$ 是下调和函数，根据极大值原理，

$$\|\underline{u}\|_{\infty,\Omega} \leq \|\underline{u}\|_{\infty,\partial\Omega} = \|g\|_{\infty,\partial\Omega} \leq R. \tag{5.16}$$

取 $\delta = R' - R$，则当 $v \in H_0^1$，$\|v\|_\infty \leq \delta$ 时，我们有 $\underline{u} + v \in K_g$，故 (5.14) 成立. □

注记 5.1　修改引理 5.1 的证明 II，则可发现：极值问题 $\inf_{u \in K_g} J(u)$ 的任一极小化序列在 H_0^1 中都是相对列紧的.

2. 极小解的稳定性.

本小节将证明，(HD) 的局部极小解是稳定的. 设 $\underline{u}$ 是问题 (HD) 的劣解，记

$$T_{\underline{u}}(v) = \int |\nabla v|^2 + 4H \int \underline{u} \cdot v_x \wedge v_y.$$

引理 5.3　*设 $\underline{u}$ 是定理 5.2 所给问题 (HD) 的劣解，则存在 $\delta > 0$ 使得*

$$T_{\underline{u}}(v) \geq \delta \|\nabla v\|_2^2, \quad \forall\, v \in H_0^1. \tag{5.17}$$

注记 5.2　$\mathrm{d}^2 J(\underline{u})(v,v) = T_{\underline{u}}(v)$. 引理 5.3 说的是，泛函 J 在 $\underline{u}$ 处的二阶微分是强制的. 这样的临界点称为 J 的稳定临界点，也称其为对应 Euler 方程 (HD) 的稳定解. 若 (HD) 的某个解 u^0 满足 $\mathrm{d}^2 J(u^0)(v,v) \geq 0$，则称 u_0 是半稳定解.

证明　首先注意，(5.17) 式等价于下式 (其中常数 $\mu > 0$)：

$$T_{\underline{u}}(v) \geq \mu \|v\|_2^2, \quad \forall\, v \in H_0^1. \tag{5.18}$$

对于 $v \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$，及 $|t| > 0$ 充分小，令

$$f_v(t) = J(\underline{u} + tv) - J(\underline{u}),$$

直接计算可得

$$f_v(t) = t\int\left\{\nabla\underline{u}\cdot\nabla v + 2Hv\cdot\underline{u}_x\wedge\underline{u}_y\right\} + \frac{t^2}{2}\int|\nabla v|^2 + \frac{2Ht^2}{3}\int\left\{\underline{u}\cdot v_x\wedge v_y + v\cdot\left[u_x\wedge v_y + v_x\wedge u_y\right]\right\} + 2Ht^3V(v).$$

由于 $\underline{u}$ 是 (HD) 的解，上式右端第一个积分为零，再利用引理 5.28 (见 p.155) 提供的恒等式，上式变为

$$f_v(t) = (t^2/2)T_{\underline{u}}(v) + 2Ht^3V(v). \tag{5.19}$$

由不等式 (5.14) 知，$f_v(t)$ 在 $t=0$ 处取极小值 $f_v(0)=0$，因而 $f_v''(0)\geq 0$，即

$$f_v''(0) = T_{\underline{u}}(v) \geq 0. \tag{5.20}$$

且若上式取等号，则必有 $f_v'''(0) = 12HV(v) = 0$.

(5.20) 对所有 $v\in C_c^1$ 成立，过渡到极限则对所有 $v\in H_0^1$ 成立. 现在，令

$$\lambda = \inf_{0\neq v\in H_0^1}\frac{T(v)}{\|v\|_2^2} \tag{5.21}$$

则依 (5.20)，$\lambda\geq 0$. 因 $T(v)$ 是 v 的凸函数，故 H_0^1-下半弱连续，λ 可被某个 $0\neq\mathring{v}\in H_0^1$ 达到.

若 $\lambda>0$，则命题获证. 不然，如若 $\lambda=0$，将有 $0\neq\mathring{v}\in H_0^1$ 达到 (5.21) 的下确界 $\lambda=0$，即

$$\int|\nabla\mathring{v}|^2 + 4H\int\underline{u}\cdot\mathring{v}_x\wedge\mathring{v}_y = 0. \tag{5.22}$$

对极值问题 (5.21) 应用 Lagrange 乘数法 (乘子为零)，同时使用引理 5.27 中的恒等式化简，我们有

$$\Delta\mathring{v} = 2H\left(\underline{u}_x\wedge\mathring{v}_y + \mathring{v}_x\wedge\underline{u}_y\right). \tag{5.23}$$

根据 Wente 正则化引理 (见 p.150)，$\mathring{v}\in L^\infty$. 因 $f_{\mathring{v}}(0)$ 是 $f_{\mathring{v}}(t)$ 的极小值，并且

$$f_{\mathring{v}}(0)=0,\quad f_{\mathring{v}}'(0)=0,\quad f_{\mathring{v}}''(0)=0,\quad f_{\mathring{v}}'''(0)=0.$$

以上各式成立的根据是：第一式来自定义；第二式的成立是因为 $f_{\mathring{v}}(0)$ 是 $f_{\mathring{v}}(t)$ 的局部极小值；第三式来自 (5.22)；最后一式的依据是前一式的推论 (否则 $f_{\mathring{v}}(0)$ 不是极小值).

因 $f_{\mathring{v}}(t)$ 是 t 的至多三次多项式，因而 $f_{\mathring{v}}(t) \equiv 0$，即 $J(\underline{u} + t\mathring{v}) = J(\underline{u})$. 由定理 5.2 知，$(\underline{u} + t\mathring{v})$ 满足 H-方程，即

$$\Delta(\underline{u} + t\mathring{v}) = 2H(\underline{u} + t\mathring{v})_x \wedge (\underline{u} + t\mathring{v})_y, \tag{5.24}$$

上式关于 t 求导两次，得到 $\mathring{v}_x \wedge \mathring{v}_y = 0$，回到 (5.22) 式得到 $\int |\nabla \mathring{v}|^2 = 0$，即有 $\mathring{v} \equiv 0$. 这一矛盾说明 $\lambda > 0$. □

3. **稳定解的唯一性.**

命题 5.4 在定理 5.2 的条件下，问题 (HD) 不存在除极小解 $\underline{u}$ 以外的半稳定解.

证明 假定除 $\underline{u}$ 外，另有一个半稳定解 $\underline{u}_1 \in H^1 \cap L^\infty$，$\underline{u}_1 \neq \underline{u}$. 令 $v = \underline{u}_1 - \underline{u}$，置 $f_v(t) = J(\underline{u} + tv) - J(\underline{u})$，则 $f_v(t)$ 是 t 的至多三次多项式. 因 $\underline{u}$, $\underline{u}_1$ 是 J 的临界点，所以 $f_v'(0) = f_v'(1) = 0$. 由此可知 $f_v'(t) = ct(1-t)$.

由于 $\underline{u}$ 是稳定解而 $\underline{u}_1$ 是半稳定解，由 (5.19) 式看出

$$f_v''(0) = T_{\underline{u}}(v) > 0, \quad f_v''(1) = T_{\underline{u}_1}(v) \geq 0.$$

但 $f_v''(t) = c(1-2t)$，不可能同时满足上两式，这一矛盾便证明了命题. □

4. **极小解对初值的连续相依性.**

为便于讨论具常曲率的 Plateau 问题，我们需要知道 Dirichlet 问题的极小解对初值的某种弱的连续相依性.

设 $\{g_n\}_0^\infty \subset H^{1/2}(\partial\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega)$，满足

$$\begin{cases} \|g_n\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq R, \quad \|g_n\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq C, \\ \|g_n - g_0\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \to 0, \end{cases} \tag{5.25}$$

记 $\underline{u}^n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 为对应于边值 g_n 的 Dirichlet 问题 (HD) 的极小解，那么关于 $\underline{u}^n$ 我们有什么结论呢？我们有

引理 5.5 在条件 (5.25) 下，成立：

$$\underline{u}^n \xrightarrow{w} \underline{u}^0 \quad 在\ H_0^1(\Omega)\ 中; \tag{5.26}$$

且存在序列 $\{v^n\} \subset H_{g_0}^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ 使得

$$\|v^n - \underline{u}^n\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0, \quad \|v^n - \underline{u}^0\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0. \tag{5.27}$$

v^n 的好处是，在边界 $\partial\Omega$ 上，边值均为 g_0.

证明 首先，(5.27) 隐含 (5.26)，因为，根据 (5.27) 的第一式，$\underline{u}^n - v^n \xrightarrow{w} 0$ 于 $H_0^1(\Omega)$ 中，而 (5.27) 的第二式导致 $v^n - \underline{u}^0 \xrightarrow{s} 0$ 于 $H_0^1(\Omega)$ 中.

令 h^n 是如下 Laplace 边值问题的解

$$\Delta h^n = 0 \quad 在\ \Omega\ 中, \quad h^n|_{\partial\Omega} = g_n - g_0.$$

置 $v^n = \underline{u}^n - h^n$，则 ($v^n|_{\partial\Omega} = g_0$) 满足引理的要求.

确实，根据极大值原理，显然有

$$\|v^n - \underline{u}^n\|_{L^\infty(\Omega)} = \|h^n\|_{L^\infty(\Omega)} = \|g_n - g_0\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \to 0. \tag{5.28}$$

这就证明了 (5.27) 的第一式. 为证明第二式，取 $R' \in (R, 1/H)$，记

$$K^n = \{u \in H^1 : u|_{\partial\Omega} = g_n, \|u\|_{L^\infty} \le R'\},$$
$$K^0 = \{u \in H^1 : u|_{\partial\Omega} = g_0, \|u\|_{L^\infty} \le R'\}.$$

因 $\|\underline{u}^n\|_{L^\infty} \le R$，据 (5.28)，对于 n 充分大，$\underline{u} + h^n \in K^n$，$v^n = \underline{u}^n - h^n \in K^0$.

先记住一个事实：因 $\underline{u}^n$ 是 $(\mathrm{HD})_{g_n}$ 的极小解，故对于 n 充分大，

$$J(\underline{u}^n) \le J(\underline{u} + h^n). \tag{5.29}$$

我们断言，当 $n \to \infty$ 时，

$$J(v^n) \le J(\underline{u}) + o(1), \tag{5.30}$$

这将表明 $v^n \in K^0$ 是极值问题

$$\inf_{u \in K^0} J(u) \quad (= J(\underline{u}))$$

的一极小化序列，因而 v^n 在 H^1 中强收敛于 $\underline{u}$ (见 126 页注记 5.1).

往证 (5.30). 首先由 J 在 K^n 上的强制性及 (5.29) 式知

$$\frac{1}{6}\int |\nabla \underline{u}^n|^2 \le J(\underline{u}^n) \le J(\underline{u} + h^n),$$

而 $J(\underline{u} + h^n)$ 有界 (h^n 在 $H^1 \cap L^\infty$ 中有界)，故

$$\|\underline{u}^n\|_{H^1} \le C, \quad \|v^n\|_{H^1} \le C. \tag{5.31}$$

现在，回顾 J 的表达式

$$J(v^n) = \frac{1}{2}\int |\nabla v^n|^2 + \frac{2H}{3}\int v^n \cdot v_x^n \wedge v_y^n,$$

我们有 (注意 $v^n = \underline{u}^n - h^n$)

$$\int |\nabla v^n|^2 = \int |\nabla \underline{u}^n|^2 - 2\int \nabla v^n \cdot \nabla h^n + \int |\nabla h^n|^2. \tag{5.32}$$

接下来证明

$$\int v^n \cdot v_x^n \wedge v_y^n = \int \underline{u}^n \cdot \underline{u}_x^n \wedge \underline{u}_y^n - \int v^n \cdot h_x^n \wedge h_y^n + o(1). \tag{5.33}$$

确实，(注意 $\underline{u}^n = v^n + h^n$)我们有

$$\int \underline{u}^n \cdot \underline{u}_x^n \wedge \underline{u}_y^n = \int v^n \cdot v_x^n \wedge v_y^n + \int v^n \cdot h_x^n \wedge h_y^n + I_1 + I_2$$

其中 $$I_1 = \int v^n \cdot \left[v_x^n \wedge h_y^n + h_x^n \wedge v_y^n\right] = o(1), \qquad \text{(由引理 5.33)}$$

$$I_2 = \int h^n \cdot \underline{u}_x^n \wedge \underline{u}_y^n = o(1). \qquad \text{(由 (5.27) 及 (5.31))}$$

故 (5.33) 成立. 综合 (5.32) 与 (5.33) 两式，并注意 J 的表达式，我们有

$$J(v^n) = J(\underline{u}^n) - \frac{1}{2}\int |\nabla h^n|^2 - \int \nabla v^n \cdot \nabla h^n - \frac{2H}{3}\int v^n \cdot h_x^n \wedge h_y^n + o(1).$$

将 (5.29) 右端展开，注意应用 (5.27) 及 $h^n \xrightarrow{w} 0$ 这一事实简化，得

$$J(\underline{u}^n) \le J(\underline{u}) + \int \nabla \underline{u} \cdot \nabla h^n + \frac{2H}{3}\int \underline{u} \cdot h_x^n \wedge h_y^n + o(1)$$

合并以上两个长表达式得

$$J(v^n) \le J(\underline{u}) - \int \nabla(v^n - \underline{u}) \cdot \nabla h^n - \frac{2H}{3}\int (v^n - \underline{u}) \cdot h_x^n \wedge h_y^n + o(1).$$

上述不等式的右边第一个积分等于零，这是因为 $(v^n - \underline{u})|_{\partial\Omega} = 0$ 及 $\Delta h^n = 0$；而第二个积分根据引理 5.32 趋向于零. 于是

$$J(v^n) \le J(\underline{u}) + o(1).$$

这样便证明了不等式 (5.30)，也就证明了引理 5.5. □

二、Plateau 问题的劣解

设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ 是一 *Jordan* 闭曲线，考虑本章起初提出的问题：求一个向量值函数 $u \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^3) \cap C(\overline{\Omega})$ 使得

$$\begin{aligned} &\Delta u = 2H u_x \wedge u_y && \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ &\omega(u) = 0 && \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ &u(\partial\Omega) = \Gamma, \text{ 且 } u|_{\partial\Omega} \text{ 单调}. \end{aligned} \tag{HP}$$

这里，$H > 0$ 是一常数，而 $\omega(u)$ 表示 u 的 Hopf 导数.

利用我们对 Dirichlet 问题极小解的认识及 Douglas-Rodó 方法 (三定点条件及 Courant-Lebesgue 引理)，并注意到体积积分的同胚不变性，不难给出问题 (HP) 的劣解.

我们将在条件 (5.1) 下展开. 考虑下列极值问题

$$\mu = \inf_{u \in K_\Gamma^*} J(u). \tag{5.34}$$

这里 K_Γ^* 已由 (5.6) 定义，内中 $R' \in (R, 1/H)$.

定理 5.6 设 $HR < 1$，则极值问题 (5.34) 有解，即存在 $\underset{\sim}{u} \in K_\Gamma^*$ 使得 $J(\underset{\sim}{u}) = \mu$.

证明 设 $u_n \in H_\Gamma^*$ 是极值问题 (5.34) 的一极小化序列，

$$J(u_n) = \inf_{u \in H_\Gamma^*} J(u) + o(1),$$

我们有 (见 (5.8))

$$\frac{1}{6}\int |\nabla u^n|^2 \leq J(u^n) = \mu + o(1),$$

因而 $\|u^n\|_{H^1} \leq C$ 有界，故存在 $\underset{\sim}{u} \in H^1$ 使得 $u^n \overset{w}{\rightharpoonup} \underset{\sim}{u}$ 在 H^1 中. 由于 H_Γ^* 弱列闭 (见p.114 命题 4.4)，我们有 $\underset{\sim}{u} \in H_\Gamma^*$. 最后由于 J 在 K_Γ^* 上是下半弱连续的 (见引理 5.1)，我们有

$$J(\underset{\sim}{u}) \leq \liminf J(u^n) = \mu.$$

即 $\underset{\sim}{u} \in K_\Gamma^*$ 是极值问题 (5.34) 的解. □

引理 5.7　若 $\underset{\sim}{u} \in H_\Gamma^*$ 是极值问题 (5.34) 的解，则 $\underset{\sim}{u}$ 也是 Plateau 问题 (HP) 的解.

证明　记 $\underset{\sim}{u}|_{\partial\Omega} = \tilde{g}$，则 $K_{\tilde{g}} \subset K_\Gamma^*$（$K_g$ 由 (5.4) 定义），因而 $\underset{\sim}{u}$ 满足 $J(\underset{\sim}{u}) = \inf\limits_{u \in K_{\tilde{g}}} J(u)$. 根据定理 5.2，$\underset{\sim}{u}$ 是 $(\mathrm{HD})_{\tilde{g}}$ 的解（满足 H 方程），且 $\|\underset{\sim}{u}\|_{L^\infty} \le R$.

为证 u 满足共形条件，须证明 $\underset{\sim}{u}$ 的 Hopf 导数 $\omega = 0$. 为此，考虑泛函 $J(u)$ 在 $\underset{\sim}{u}$ 处关于区域 Ω 的变分：设 $Z = (X, Y) \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$ 是任一向量常在边界 $\partial\Omega$ 上 $Z \cdot \vec{n} = 0$. 令

$$\phi(t, z) = z + tZ(z),$$

则对于 $|t|$ 充分小，$\phi(t, \cdot)$ 是微分同胚（见 112 页）. 记 $u^t = \underset{\sim}{u} \circ \phi(t, \cdot)$，则 $u^t \in H_\Gamma$. 由于 $J(u)$ 是共形不变的，$\underset{\sim}{u}$ 也是泛函 J 在 K_Γ 上的极小值点，因此 $t = 0$ 时 $J(u^t)$ 取极小值 $J(\underset{\sim}{u})$，故

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} J(u^t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \big(E(u^t) + 2HV(u^t)\big) = 0,$$

其中 $E(u)$, $V(u)$ 分别是 Dirichlet 积分与体积积分. 因体积积分 $V(u)$ 在微分同胚下不变，$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)V(u^t) \equiv 0$，上式变为

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E(u_t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_\Omega |\nabla u^t|^2 = 0,$$

这式与 (4.15) 式完全一致，照搬引理 4.2 的证明步骤，得出结论 $\omega(\underset{\sim}{u}) = 0$. □

第三节　DIRICHLET 问题的优解

我们已经得到 Dirichlet 问题 (HD) 的一个极小解或劣解 $\underset{\sim}{u}$. 现寻找问题 (HD) 的形如 $u = \underset{\sim}{u} + v$ 的另一解，这样 v 满足

$$\begin{aligned} Lv &= -2Hv_x \wedge v_y \qquad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ v &= 0 \qquad\qquad\qquad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{aligned} \tag{5.35}$$

其中

$$Lv = -\Delta v + 2H\big(\underset{\sim}{u}_x \wedge v_y + v_x \wedge \underset{\sim}{u}_y\big).$$

L 显然是 H_0^1 上的自共轭算子.

本节的主要任务是证明如下 Brezis-Coron 定理.

定理 5.8 (Brezis-Coron [48]) 设 $g \in H^{1/2} \cap L^\infty(\partial\Omega)$，且 $g \neq \text{Const.}$，则在条件 (5.3) (即$HR < 1$)下，问题 (HD) 至少存在两个不同的解.

一、变分结构

问题 (5.35) 对应的变分泛函是，$\Phi(v) = J(\underline{u} + v) - J(\underline{u})$. 利用引理 5.28 (见 p.155) 提供的恒等式，容易看出，

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}T_{\underline{u}}(v) + \frac{2}{3}HW(v), \quad v \in H_0^1 \cap L^\infty,$$

其中 $W(v) = 3V(v)$，也叫体积积分，而 $T_{\underline{u}}(v) = \langle v, Lv \rangle$，即

$$T_{\underline{u}}(v) = \int |\nabla v|^2 + 4H \int \underline{u} \cdot v_x \wedge v_y.$$

泛函 Φ 中的体积积分 $W(v)$，具有共形不变性，导致 Φ 不满足 (P.S.) 条件，在应用变分法时，须作更细致的分析. 这里，Wente 等周不等式起作重要作用，它扮演类似于 Brezis-Nirenberg 模型中最佳 Sobolev 不等式的角色.

体积积分 $W(v)$ 带来的另一不便是，它只在 $L^\infty \cap H_0^1$ 时才有意义，而应用变分法时须在整个 H_0^1 上讨论. 这一点也可通过 Wente 等周不等式来克服.

1. Wente 等周不等式.

Wente 等周不等式是通常等周不等式的另一种表现形式，它的证明 (见 Wente [209]) 有赖于 Bononcini 的有关不等式，Wente 等周不等式也称为 Bononcini-Wente 等周不等式.

引理 5.9 (Wente 等周不等式) 对于任意 $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3)$，成立如下不等式

$$\left|\int v \cdot v_x \wedge v_y\right|^{2/3} \leq \frac{1}{S}\int |\nabla v|^2,$$

其中 S 为最佳常数，$S = (32\pi)^{1/3}$.

记

$$R(u, v) = \int u \cdot v_x \wedge v_y, \tag{5.36}$$

应用初等微积分，可以证明，与 Wente 等周不等式等价地有下列

命题 5.10 (Wente 等周不等式) 对于任意 $u, v \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3)$,

$$|R(u,v)| \leq (1/S)^{3/2} \|\nabla u\|_2 \, \|\nabla v\|_2^2.$$

在应用变分法时，我们需扩张 $R(u,v)$ 及 $W(v)$ 到整个 H_0^1 上. 为此，除了上述命题中不等式，还需

命题 5.11 设 $u, v \in H_0^1 \cap L^\infty$, 则有下列恒等式

$$R(v, v+w) = R(v,v) + R(v,w) + 2R(w,v), \tag{5.37}$$

$$W(u+v) = W(u) + 3R(v,u) + 3R(u,v) + W(v). \tag{5.38}$$

证明 由引理 5.28 可得. □

由此，再根据 Wente 等周不等式 (命题 5.10)，我们有

引理 5.12 由 (5.36) 定义的映射 $(u,v) \mapsto R(u,v)$ 可以唯一连续扩张到 $H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, 且满足

$$|R(u,v)| \leq (1/S)^{3/2} \|\nabla u\|_2 \, \|\nabla v\|_2^2.$$

今后，凡出现 $R(u,v)$ 及 $W(v)$，指的就是上述扩张，它们除保持 Wente 不等式外，也保持了恒等式 (5.37) 与 (5.38). 进而

引理 5.13 我们有

(α) $v^n \xrightarrow{w} v$ 在 H_0^1 中 $\Longrightarrow R(u, v^n) \to R(u,v)$, 其中 $u \in H^1$;

(β) $\theta^n \xrightarrow{w} 0$ 在 H_0^1 中 $\Longrightarrow W(v+\theta^n) = W(v) + W(\theta^n) + o(1)$.

注记 5.3 正如最佳 Sobolev 常数不能在有界域上达到，Wente 不等式中的最佳常数 S 也不能被 $H_0^1(\Omega)$ 中的函数达到. 否则将有非零函数 $v \in H_0^1(\Omega)$ 满足 H 方程:

$$\Delta v = v_x \wedge v_y \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \tag{5.39}$$

与 Wente 的唯一性定理 (定理 5.14) 相矛盾.

注记 5.4 Wente 不等式中的最佳常数 S 可被如下一族向量值函数取到:

$$\phi^{\varepsilon}(x,y)=\frac{(x,y,\varepsilon)}{\varepsilon^2+x^2+y^2},\quad \varepsilon>0. \tag{5.40}$$

注意，$u=\phi^{\varepsilon}(x,y)$ 给出了中心在 $(0,0,(2\varepsilon)^{-1})$，半径为 $(2\varepsilon)^{-1}$ 的球面的共形参数表示，逆映射 $(\phi^{\varepsilon})^{-1}$ 是由北极 $(0,0,\varepsilon^{-1})$ 发出的球极投影.

定理 5.14 (Wente [210]) 如果 $v\in H_0^1(\Omega)$ 是问题 (5.39) 的解，则 $v\equiv 0$.

证明 利用反射将 $v(z)$ 扩充到整个复平面 $\mathbb{C}$，即令

$$v(z)=-v(z/|z|^2),\quad |z|>1.$$

这样，v 在整个 $\mathbb{R}^2$ 上在弱意义下满足 (5.39). 根据 Wente 正则化定理，v 在 $\mathbb{R}^2$ 上光滑. 另一方面，由于 v 的 Hopf 导数 $\omega=v_x^2-v_y^2-2\mathrm{i}v_x\cdot v_y$ 在 C 上全纯，且

$$\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v|^2=2\int_{\Omega}|\nabla v|^2<\infty,$$

我们有 $\omega\in L^1(\mathbb{R}^2)$，由全纯函数的均值公式，对任意 $R>0$ 及 $z_0\in\mathbb{C}$，我们有

$$|\omega(z_0)|\le\frac{1}{2\pi R}\iint_{|z-z_0|\le R}|\omega|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

故 $\omega\equiv 0$，即 v 是共形的，故由 $v|_{\partial\Omega}=0$ 推出 $\nabla v|_{\partial\Omega}=0$，从而 $v\equiv 0$. □

2. **山路型结构.**

泛函 Φ 具有一个山路型结构，因为根据引理 5.3，我们有

$$T_{\underline{u}}(v)\ge\delta\|\nabla v\|_2^2,\quad \forall\, v\in H_0^1,$$

故在邻域 $U:=\{v\in H_0^1:\|\nabla v\|_2<(S^{3/2}(4H)^{-1})\delta\}$ 的边界 ∂U 上，应用 Wente 等周不等式得

$$\begin{aligned}\Phi(v)&=\frac{1}{2}T_{\underline{u}}(v)-\frac{2}{3}HW(v)\\&\ge 2^{-1}\delta\|\nabla v\|_2^2-S^{-3/2}H\|\nabla v\|_2^3\\&=4^{-1}\delta^3>0=\Phi(0),\end{aligned}$$

即 Φ 满足 (mp_1). 又因 $T_{\underline{u}}(v)$ 是二次齐次的, $W(u)$ 是三次的, 取 $w_1 \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ 使得 $W(w_1) < 0$, 则对于 $t > 0$ 充分大, 我们有

$$\Phi(v_1) := \Phi(tw_1) < 0,$$

即 Φ 满足 (mp_2). 因此

$$c = \inf_{P \in \mathscr{P}} \max_{w \in P} \Phi(w) \tag{5.41}$$

是泛函 Φ 的广义临界值. 这里 $\mathscr{P}$ 为 H_0^1 中联结 0 与 v_1 的道路 P 的集合.

如果我们能够证明 Φ 在山路水平满足 $(\mathrm{P.S})_c$ 条件, 便可获得问题 (5.35) 的一个非平凡解, 因而获得问题 (HD) 的非极小解. 但由于 $\Phi(v)$ 的表达式中的 Dirichlet 积分 $\mathcal{D}(v)$ 与体积积分 $W(v)$ 都是共形不变的, $\Phi(v)$ 不满足全局的 (P.S) 条件, 这正是问题的困难所在.

3. 条件极值.

我们也可将问题 (5.35) 转化为条件极值问题. 设 $u \in H_0^1 \cap L^\infty(\Omega)$, $v \in H_0^1(\Omega)$, 类似于 Yamabe 商, 令

$$Q(u,v) = \frac{\int |\nabla v|^2 + 4H \int u \cdot v_x \wedge v_y}{|W(v)|^{2/3}}, \tag{5.42}$$

设 $\underline{u}$ 是问题 (HD) 的极小解, 考虑极值问题

$$\Lambda = \inf\{Q(\underline{u}, v) : v \in H_0^1, \quad W(v) = 1\}. \tag{5.43}$$

那么, 求解 (5.35) 的问题便化归为求解极值问题 (5.43).

确实, 若 $v \in H_0^1$ 是极值问题 (5.43) 的解, 由 Lagrange 乘子法, v 满足 (注意 $W(v) = 1$)

$$Lv = \Lambda v_x \wedge v_y \qquad \text{在 } \Omega \text{ 中}.$$

拉伸乘数 Λ, 令 $\bar{v} = -(\Lambda/2H)v$, 则 $\bar{v}$ 是问题 (5.35) 的解.

然而, 由于 $W(v)$ 在 H_0^1 中不是弱连续的, 要证明极值问题 (5.43) 可解, 需进一步作细致分析其极小化序列.

4. **两种变分法的等价性.**

不论采用山路引理还是应用条件极值的办法，我们本质上得到问题 (5.35) 相同类型的解. 这可从以下的命题 5.15 中看出. 首先考虑

$$c_1 := \inf_{0\neq v\in H_0^1}\sup_{t\geq 0}\Phi(tv). \tag{5.44}$$

对于给定的 $0\neq v\in H_0^1$，如果 $W(v)\geq 0$，则 $\sup_{t\geq 0}\Phi(tv)=+\infty$；如果 $W(v)<0$，由初等微积分可知，$\Phi(tv)$ 在 $t_v=-T_{\underline{u}}(v)/(2HW(v))$ 取最大值

$$\sup_{t\geq 0}\Phi(tv)=\Phi(t_v v)=\frac{1}{24H^2}\frac{|T_{\underline{u}}(v)|^3}{|W(v)|^2}. \tag{5.45}$$

对 v 取下确界，则得 $c_1=\Lambda^3/(24H^2)$. 因此，若 $\mathring{v}$ 是极值问题 (5.43) 的解，则 $\bar{v}=-(\Lambda/2H)\mathring{v}$ 满足

$$\Phi(\bar{v})=c_1=\Lambda^3/(24H^2) \tag{5.46}$$

命题 5.15 设 $v_1\in H_0^1$ 满足 $W(v_1)<0$, $\Phi(v_1)<0$. 设 c 及 c_1 分别由 (5.41) 及 (5.44) 所给，则 $c=c_1=\Lambda^3/(24H^2)$.

证明 首先，我们注意，集合 $W^-=\{v\in H_0^1: W(v)<0\}$ 是道路连通的. 由此，集合 $\Phi^-=\{v\in W^-: \phi(v)<0\}$ 也是道路连通的. 因而，对于所有 $v_1\in\Phi^-$, (5.41) 式都产生同一广义临界值 c. 由此可知，$c\leq c_1$.

另一方面，W^- 中的连续超曲面

$$\Sigma=\{t_v v: v\in\partial U\cap W^-\},$$

将 W^- 分为两部分（见图 5.2），

$$\Omega_1=\{t\varphi: \varphi\in\Sigma, t>1\}$$

及

$$\Omega_2=\{t\varphi: \varphi\in\Sigma, t<1\}.$$

W^- 中原点 0 附近的点及 Φ^- 中的点分别位于其两测. 因此任意联结 0 和 $v_1\in\Phi^-$ 的道路 P 必然与 Σ 相交，记交点为 v_p，则

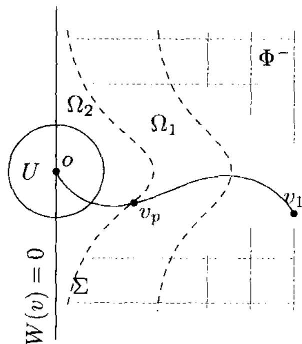


图 5.2: 山路型结构

$$\max_{w\in P}\Phi(w)\geq\Phi(v_P)=\sup_{t\geq 0}\Phi(tv_P)\geq c_1,$$

取下确界，便得 $c\geq c_1$. 故 $c_1=c$. □

注记 5.5　在应用山路引理时，v_0 及 v_1 的选择具有很大的自由度. 我们知道，在 (mp_2) 中，任意选择 $v^1 \in \Phi^-$ 产生相同的广义临界值 c. 此外，取常数 A 适当小，使得当 $v_0 \in H_0^1$ 且 $\|\nabla v_0\|_2 \le A\delta^{3/2}$ 时

$$\Phi(v_0) \le 5^{-1}\delta^3 < 4^{-1}\delta^3 < \inf_{\partial U} \Phi(v),$$

这样在整个线段 $[0, v^0]$ 上都有 $\Phi(v) < \inf_{\partial U} \Phi(v)$. 在 ($\text{mp}_1$) 中选择这样的 v^0 也将得到同一广义临界值 c.

根据以上注记，可得下列估计，这将在讨论问题 (HP) 的优解时用到.

命题 5.16　*存在常数 $A > 0$，使得当 $v^0 \in H_0^1$ 且 $\|\nabla v^0\|_2 \le A\delta^{3/2}$ 时*

$$\sup_{t \ge 0} \Phi(v_0 + tv) \ge \frac{1}{24H^2}\Lambda^3 \quad \forall\, v \in H_0^1,\ v \ne 0.$$

证明　若 $W(v) > 0$，显然 $\sup_{t\ge 0} \Phi(v^0 + tv) = +\infty$. 若 $W(v) = 0$，则

$$\begin{aligned}\Phi(v^0 + tv) &= \frac{1}{2}T_{\underline{u}}(v^0 + tv) + \frac{2}{3}H(v^0 + tv)\\ &= \frac{t^2}{2}T_{\underline{u}}(v) + 2Ht^2 \int v^0 \cdot v_x \wedge v_y + O(t)\\ &\ge t^2\|\nabla v\|_2^2\left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{S^{3/2}}\|\nabla v^0\|_2\right) + O(t),\end{aligned}$$

所以，只要 A 适当小，依然有 $\sup_{t\ge 0} \Phi(v^0 + tv) = +\infty$. 当 $W(v) < 0$ 时，取 $t_0 > 0$ 充分大，使当 $t \ge t_0$ 时 $\Phi(v^0 + tv) < 0$. 考察连结 v^0 及 $v^0 + t_0 v$ 的所有道路上产生的广义临界值，由注记 5.5 知

$$\sup_{0 \le t \le t_0} \Phi(v^0 + tv) \ge c = \frac{1}{24H^2}\Lambda^3.$$

这就完成了命题的证明. □

5. Aubin 型判据.

引理 5.17　*设 Λ 为 (5.43) 所给. 如果 $\Lambda < S$，则极值问题 (5.43) 的每一个极小化序列在 $H_0^1(\Omega)$ 中相对列紧，因而 Λ 可被某个 $\mathring{v}$ 达到.*

证明 设 $v^n \in H_0^1(\Omega)$ 是极值问题 (5.43) 的一个极小化序列，满足

$$\|\nabla v^n\|_2^2 + 4HR(\underline{u}, v^n) = \Lambda + o(1), \quad W(v^n) = 1. \tag{5.47}$$

由上式及引理 5.3 知，v^n 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界，故可抽取子列，仍记为 v^n，使得

$$v^n \xrightarrow{w} v \quad \text{在 } H_0^1 \text{ 中}, \qquad v^n \xrightarrow{\text{p.p.}} v \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}.$$

记 $v^n = v + \theta^n$，于是

$$\theta^n \xrightarrow{w} 0 \quad \text{在 } H_0^1 \text{ 中}, \qquad \theta^n \xrightarrow{\text{p.p.}} 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}.$$

根据引理 5.12 得，$R(\underline{u}, v^n) = R(\underline{u}, v) + o(1)$，所以 (5.47) 变为

$$\|\nabla v\|_2^2 + 4HR(\underline{u}, v) + \|\nabla \theta^n\|_2^2 = \Lambda + o(1), \tag{5.48}$$

如果 v 不恒等于零，利用关系 $\Lambda \leq Q(\underline{u}, v)$，我们有

$$\Lambda |W(v)|^{2/3} \leq \|\nabla v\|_2^2 + 4HR(\underline{u}, v),$$

但即便 v 恒等于零，上式依然成立. 结合 (5.48) 得

$$\|\nabla \theta^n\|_2^2 \leq \Lambda\big(1 - |W(v)|^{2/3}\big) + o(1). \tag{5.49}$$

另一方面，根据 Brezis-Lieb 型分解，我们有

$$1 = W(v + \theta^n) = W(v) + W(\theta^n) + o(1).$$

于是

$$1 \leq |W(v)|^{2/3} + |W(\theta^n)|^{2/3} + o(1).$$

根据 Wente 等周不等式 $S|W(\theta^n)|^{2/3} \leq \|\nabla \theta^n\|_2^2$，由上式得

$$1 \leq |W(v)|^{2/3} + \frac{1}{S}\|\nabla \theta^n\|_2^2 + o(1),$$

或等价地

$$\|\nabla \theta^n\|_2^2 \geq S\big(1 - |W(v)|^{2/3}\big) + o(1). \tag{5.50}$$

由 (5.50) 及 (5.49) 式可得

$$\big(1-(\Lambda/S)\big)\|\nabla\theta^n\|_2^2 \le o(1).$$

因 $\Lambda < S$，上式两边取极限得 $\lim\|\nabla\theta^n\|_2 = 0$，即 v^n 在 H_0^1 中强收敛于 v，因而 $W(v)=1$. 由 (5.48) 知，$Q(\underline{u}, v)=\Lambda$ 达到下确界. □

二、试验函数及其估计

1. 主要估计.

接下来我们的任务就是寻找一个试验函数

引理 5.18 设 $u\in C^2\cap L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)$ (不必是 (HD) 的解)，$u\neq \mathrm{Const.}$. 记

$$\Lambda = \inf\big\{Q(u,v):\, v\in H_0^1,\ W(v)\neq 0\big\},$$

其中 $Q(u,v)$ 由 (5.42) 定义，则 $\Lambda < S$.

证明 由共形不变性，$Q(u,v)=Q(u\circ\varphi, v\circ\varphi)$，不妨设 $\nabla u|_{z=0}\neq 0$，且 $\vec{a}=u_x(0)$, $\vec{b}=u_y(0)$ 满足

$$\vec{a}\cdot\vec{\imath}+\vec{b}\cdot\vec{\jmath}<0, \tag{5.51}$$

其中 $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的规范基向量.

确实，假定 $\nabla u(z_0)\neq 0$，选择共形变换——分式线性函数 $\varphi:\Omega\to\Omega$，使得 $\varphi(0)=z_0$ 且 $u\circ\varphi$ 满足 (5.51).

现在，我们通过 (5.40) 所给函数 ϕ^ε 构造试验函数 v^ε. 取径向对称函数 $\xi\in\mathscr{D}(\Omega;\mathbb{R})$ 使得

$$\xi(z)=1,\ z\in B_\delta;\quad \xi(z)=0,\ z\in\Omega\setminus B_{2\delta},$$

$0<\delta<1/2$ 是固定实数. 令

$$v^\varepsilon=\xi\phi^\varepsilon=\frac{\xi(r)}{\varepsilon^2+r^2}(x,y,\varepsilon),$$

则对于这样的试验函数，我们有

$$Q(u,v^\varepsilon)=S+SH(\vec{a}\cdot\vec{\imath}+\vec{b}\cdot\vec{\jmath})\varepsilon+O(\varepsilon^2|\log\varepsilon|),\quad (\ \varepsilon\downarrow 0\ ) \tag{5.52}$$

这样，由于 (5.51)，对于 $\varepsilon>0$ 充分小，我们就有 $Q(u,v^\varepsilon)<S$，从而 $\Lambda<S$.

现在开始证明 (5.52). 为下文书写方便，令 $f_\varepsilon = \left(\varepsilon^2 + r^2\right)^{-1}$，我们有

$$\int_\Omega f_\varepsilon^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(\varepsilon^2 + r^2)^2} + O(1) = \frac{\pi}{\varepsilon^2} + O(1), \tag{5.53}$$

$$\int_\Omega f_\varepsilon^3 = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(\varepsilon^2 + r^2)^3} + O(1) = \frac{\pi}{2\varepsilon^4} + O(1), \tag{5.54}$$

先估计梯度项. 我们有 $\nabla v^\varepsilon = \xi \nabla \phi^\varepsilon + \phi^\varepsilon \nabla \xi$，而 $|\nabla \phi^\varepsilon|^2 = 2 f_\varepsilon^2$，所以

$$\int_\Omega |\nabla v^\varepsilon|^2 = \int_{B_\delta} 2 f_\varepsilon^2 + O(1) = \frac{2\pi}{\varepsilon^2} + O(1). \tag{5.55}$$

接下来估计体积积分. 由混合积的性质可见

$$v^\varepsilon \cdot (v_x^\varepsilon \wedge v_y^\varepsilon) = \xi^3 \phi^\varepsilon \cdot (\phi_x^\varepsilon \wedge \phi_y^\varepsilon) = \varepsilon \xi^3 f_\varepsilon^3,$$

从而根据 (5.54)，$W(v^\varepsilon) = \pi/(2\varepsilon^3) + O(\varepsilon)$，故

$$|W(v^\varepsilon)|^{2/3} = (\pi/2)^{2/3} \frac{1}{\varepsilon^2} \left(1 + O(\varepsilon^4)\right). \tag{5.56}$$

最后估计 $R(u, v^\varepsilon)$. 注意在 $z = 0$ 点，有展开

$$u(x, y) = u(0) + \vec{a}x + \vec{b}y + O(r^2),$$

我们将建立如下估计

$$I_0 = \int_\Omega u(0) \cdot \left(v_x^\varepsilon \wedge v_y^\varepsilon\right) = 0, \tag{5.57a}$$

$$I_1 = \int_\Omega (\vec{a}x + \vec{b}y) \cdot \left(v_x^\varepsilon \wedge v_y^\varepsilon\right) = (\vec{a} \cdot \vec{\imath} + \vec{b} \cdot \vec{\jmath}) \frac{\pi}{2\varepsilon} + O(1), \tag{5.57b}$$

$$I_2 = \int_\Omega O(r^2) \cdot \left(v_x^\varepsilon \wedge v_y^\varepsilon\right) = O(|\log \varepsilon|). \tag{5.57c}$$

因此，

$$\begin{aligned} R(u, v^\varepsilon) &= \int_\Omega u \cdot \left(v_x^\varepsilon \wedge v_y^\varepsilon\right) = I_0 + I_1 + I_2, \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{\imath} + \vec{b} \cdot \vec{\jmath}) \frac{\pi}{2\varepsilon} + O(|\log \varepsilon|). \end{aligned} \tag{5.58}$$

将 (5.55), (5.56) 及 (5.58) 合起来便得 (5.52).

验证 (5.57a) 由引理 5.28 提供的恒等式 (5.95) 知，$I_0 = 0$.

验证 (5.57b) 依旧，由恒等式 (5.95)，我们有

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2}\int_\Omega v^\varepsilon \cdot \left[(\vec{a} \wedge v_y^\varepsilon) + (v_x^\varepsilon \wedge \vec{b})\right] \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \xi^2 \varphi^\varepsilon \cdot \left[(\vec{a} \wedge \varphi_y^\varepsilon) + (\varphi_x^\varepsilon \wedge \vec{b})\right] \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \xi^2 f_\varepsilon \varphi^\varepsilon \cdot \left[\vec{a} \wedge \vec{j} + \vec{i} \wedge \vec{b}\right] \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \xi^2 f_\varepsilon^2 \left[(a_1 + b_2)\varepsilon - a_3 x - b_3 y\right]
\end{aligned}$$

由对称性，

$$\int_\Omega x\xi^2 f_\varepsilon^2 = \int_\Omega y\xi^2 f_\varepsilon^2 = 0,$$

因而由 (5.53) 得，

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_\Omega \xi^2 f_\varepsilon^2 (a_1 + b_2)\varepsilon = (a_1 + b_2)\frac{\pi}{2\varepsilon} + O(\varepsilon).$$

验证 (5.57c) 我们有

$$\begin{aligned}
|I_2| &\le C\int_\Omega r^2 |\nabla v^\varepsilon|^2 \le C\int_\Omega r^2 |\nabla \varphi^\varepsilon|^2 + O(1) \\
&= 2C\int_\Omega r^2 |f_\varepsilon|^2 + O(1) \le 2C\int_\Omega \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\varepsilon^2 + r^2} = O(|\log\varepsilon|).
\end{aligned}$$

这样便完成了引理的证明. □

2. Dirichlet 问题的优解.

我们用如下引理给出定理 5.8 的证明

引理 5.19 在定理 5.8 的条件下，由 (5.43) 定义的下确界 Λ 可被某个 $\varphi \in H_0^1$ 取到，且

$$\bar{u} = \underline{u} - \frac{\Lambda}{2H}\varphi \tag{5.59}$$

是问题 (HD) 的解. 进而

$$J(\bar{u}) = J(\underline{u}) + \frac{\Lambda^3}{24H^2}. \tag{5.60}$$

注记 5.6 由引理 5.19 立知，$\bar{u} \neq \underline{u}$. 这是因为，根据极小解 $\underline{u}$ 的稳定性(见引理 5.3) 及 Wente 等周不等式 (见引理 5.9)，我们有 $\Lambda > S\delta > 0$.

证明 根据引理 5.18，我们有 $\Lambda < S$，因此，根据引理 5.17，下确界 $\Lambda = \inf\{Q(\underline{u}, v) : v \in H_0^1, \quad W(v) = 1\}$ 可被某 $\varphi \in H_0^1$ 达到，根据 p.136 的论述，$\bar{v} = -(\Lambda/2H)\varphi$ 是问题 (5.35) 的解，故 (5.59) 是 (HD) 的解. 根据 (5.46)，

$$J(\underline{u} + \bar{v}) - J(\underline{u}) = \Phi(\bar{v}) = \Lambda^3/(24H^2),$$

移项便得到 (5.60). 这样便完成引理 5.19 的证明. □

第四节 PLATEAU 问题的优解

设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ 是一封闭的 Jordan 曲线，也就是说，存在 1-1 对应的映射 $\alpha : \partial\Omega \to \mathbb{R}^3$ 使得 $\Gamma = \alpha(\partial\Omega)$，并且

$$\alpha \in C(\partial\Omega; \mathbb{R}^3) \cap H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{R}^3).$$

这里，$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是单位圆盘. 令

$$R = \max_{\partial\Omega} |\alpha|.$$

考虑本章起初提出的问题：求一个向量值函数 $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \cap C(\overline{\Omega})$ 使得

$$\begin{aligned} &\Delta u = 2H u_x \wedge u_y && \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ &\omega(u) = 0 && \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ &u(\partial\Omega) = \Gamma, \text{ 且 } u|_{\partial\Omega} \text{ 单调}. \end{aligned} \tag{HP}$$

这里，$H > 0$ 是一常数，而 $\omega(u) = u_x^2 - u_y^2 - 2\mathrm{i} u_x \cdot u_y$ 表示 u 的 Hopf 导数.

我们将证明如下 Rellich 猜想

定理 5.20 (Brezis-Coron) *设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ 是一 Jordan 闭曲线，若 $HR < 1$，则问题 (4.10) 至少存在两个几何不同解.*

注记 5.7 我们说两个解是几何不同解，如果其中一个解不能由另一个解通过共形变换获得.

一、极小化能量

为证明 Plateau 问题 (HP) 存在第二个解，我们按如下步骤来实现．由上一节知，给定 $g \in \mathscr{C}(\partial\Omega)$，记 $\underline{u}_g$ 为 Dirichlet 问题 $(\mathrm{HD})_g$ 的唯一极小解．令

$$\lambda_g = \inf_{\substack{\varphi \in H_0^1 \\ W(\varphi)=1}} \left\{ \int |\nabla\varphi|^2 + 4H \int \underline{u}_g \cdot \varphi_x \wedge \varphi_y \right\}, \tag{5.61}$$

根据引理 5.19，下确界 λ_g 可被某个 φ^g 取得，

$$\bar{u}^g = \underline{u}_g - \frac{\lambda_g}{2H}\varphi^g \tag{5.62}$$

是 Dirichlet 问题 (HD) 的优解，且 (HD) 的劣解 $\underline{u}_g$ 与优解 $\bar{u}^g$ 之间存在关系

$$J(\bar{u}^g) = J(\underline{u}_g) + \frac{\lambda_g^3}{24H^2}.$$

置

$$A(g) = J(\underline{u}_g) + \frac{\lambda_g^3}{24H^2}, \quad g \in \mathscr{C}, \tag{5.63}$$

那么 $A(g)$ 由 g 唯一确定．考虑下列极值问题

$$\mu = \inf_{g\in\mathscr{C}} A(g). \tag{5.64}$$

引理 5.21 存在 $g_0 \in \mathscr{C}$ 使得 $A(g_0) = \inf_{g\in\mathscr{C}} A(g)$.

证明 引理的证明分两个阶段来完成.

第一阶段 这一阶段的任务是得到后边的不等式 (5.69)．现在，设 $g_n \in \mathscr{C}$ 是极值问题 (5.64) 的任一极小化序列，$\underline{u}^n$ 是对应于边值 g_n 的 Dirichlet 问题 (HD) 的极小解，即

$$A(g_n) = J(\underline{u}^n) + \frac{\lambda_n^3}{24H^2} = \mu + o(1) \tag{5.65}$$

其中 $\lambda_n = \lambda_{g_n}$.

从 (5.65) 出发，注意到 $\|\underline{u}^n\|_{L^\infty} \le R$ 及 $\lambda_n \le S$，再根据 J 的局部强制性，我们有

$$\frac{1}{6}\int |\nabla\underline{u}^n|^2 \le J(\underline{u}^n) = \mu - \frac{\lambda_n^3}{24H^2} + o(1). \tag{5.66}$$

这说明 $\|\underline{u}^n\|_{H^1} \leq C$ 或等价地 $\|g_n\|_{H^{1/2}} \leq C$. 现在 $\{g_n\}$ 一致有界，根据 Courant-Lebesgue 引理或其推论，$\{g_n\}$ 等度连续，因而存在 g_n 的子列 (仍记为 g_n) 及 $g_0 \in \mathscr{C}$ 使得

$$\|g_n - g_0\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \to 0, \quad \|g_n\|_{H^{1/2}} \leq C. \tag{5.67}$$

记 $\underline{u}^0 = \underline{u}_{g_0}$，回顾引理 5.5 (见第 128 页)，我们有

$$\underline{u}^n \xrightarrow{w} \underline{u}^0 \quad \text{在 } H^1 \text{ 中}. \tag{5.68}$$

因 J 在 $K = \{u \in H^1 : \|u\|_{L^\infty} \leq R'\}$ 上是下半弱连续的，所以

$$J(\underline{u}^0) \leq J(\underline{u}^n) + o(1). \tag{5.69}$$

第二阶段　本阶段我们将证明

$$\lambda_0 \leq \lambda_n + o(1). \tag{5.70}$$

这一事实一旦证实，我们立得引理 5.21，因为根据 (5.69)，我们有

$$A(g_0) = J(\underline{u}_0) + \frac{\lambda_0^3}{24H^2} \leq J(\underline{u}^n) + \frac{\lambda_n^3}{24H^2} + o(1) = A(g_n) + o(1),$$

取极限得 $A(g_0) \leq \mu$，从而 $A(g_0) = \mu$.

证明 (5.70)　根据引理 5.19，我们设 φ^n, $\varphi^0 \in H_0^1 \cap L^\infty$ 分别是 λ_n 及 λ_0 的极值函数，即

$$\lambda_n = \int |\nabla\varphi^n|^2 + 4H \int \underline{u}^n \cdot \varphi_x^n \wedge \varphi_y^n, \quad W(\varphi^n) = 1;$$
$$\lambda_0 = \int |\nabla\varphi^0|^2 + 4H \int \underline{u}_0 \cdot \varphi_x^0 \wedge \varphi_y^0, \quad W(\varphi^0) = 1.$$

分析以上两式，单从 $\underline{u}^n$ 弱收敛于 $\underline{u}_0$ 不易得到所需估计 (5.70). 因此，我们将用性质更好的序列来取代 $\underline{u}^n$.

由于成立 (5.67) 式，再次应用引理引理 5.5，则知存在 $v^n \in H_{g_0}^1$ 使得

$$(a)\ \|v^n - \underline{u}^n\|_{L^\infty} \to 0; \quad (b)\ \|v^n - \underline{u}^0\|_{H_0^1} \to 0. \tag{5.71}$$

借助 v^n，可以很容易证得 (5.70). 先证 φ^n 的 H^1 有界性. 因为 $\underline{u}^0$ 是稳定解，故存在 $\delta > 0$ 使得

$$\delta \int |\nabla\varphi^n|^2 \leq \int |\nabla\varphi^n|^2 + 4H \int \underline{u}^0 \cdot \varphi_x^n \wedge \varphi_y^n$$
$$= \lambda_n + 4H(I_1 + I_2).$$

其中
$$I_1 = \int (v^n - \underline{u}^n) \cdot \varphi_x^n \wedge \varphi_y^n = o(1)\|\nabla \varphi^n\|_2^2,$$
$$I_2 = \int (\underline{u}^0 - v^n) \cdot \varphi_x^n \wedge \varphi_y^n = o(1)\|\nabla \varphi^n\|_2^2.$$

这里，I_1 的估计由 (5.71-a) 直接得到，I_2 的估计由 (5.71-b) 根据引理 5.31 而得. 因 $0 < \lambda_n \leq S$，于是

$$\delta \int |\nabla \varphi^n|^2 \leq S + o(1) \int |\nabla \varphi^n|^2,$$

故 φ^n 在 H_0^1 中有界. 于是由 λ_0 的极小性得

$$\begin{aligned}\lambda_0 &\leq \int |\nabla \varphi^n|^2 + 4H \int \underline{u}^0 \cdot \varphi_x^n \wedge \varphi_y^n \\ &= \lambda_n + 4H(I_1 + I_2) = \lambda_n + o(1).\end{aligned}$$

这样便证明了 (5.70)，从而完成引理 5.21 的证明. □

二、变分区域

引理 5.22 若 $A(g_0) = \inf_{g \in \mathscr{C}} A(g)$，则 $\bar{u}^{g_0}$，边值为 g_0 的 Dirichlet 问题 (HD) 的优解，也是 Plateau 问题 (HP) 的解.

根据以上引理，现在可以完成 Rellich 猜想的证明.

Rellich 猜想（定理5.20）的证明 在第1.节，我们已经得到问题 (HP) 的一个解 $\underline{u}$，其特征是 $J(\underline{u}) = \inf_{g \in \mathscr{C}} J(\underline{u}_g)$. 根据引理 5.21 及引理 5.22 我们得到问题 (HP) 的另一个解 $\bar{u} = \bar{u}^{g_0}$，其特征是 $J(\bar{u}) = \inf_{g \in \mathscr{C}} J(\bar{u}^g)$，而且

$$J(\bar{u}) = J(\underline{u}_{g_0}) + \frac{\lambda_{g_0}^3}{24H^2} \geq J(\underline{u}) + \frac{\lambda_{g_0}^3}{24H^2} > J(\underline{u}).$$

因 $J(u)$ 共形不变，故 $\underline{u}$ 与 $\bar{u}$ 是几何不同解. □

为完成引理 5.22 的证明，我们需作一些技术准备.

1. 变分区域.

设 $Z = (X, Y) \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$ 是任一向量常在边界 $\partial\Omega$ 上，$Z \cdot \vec{n} = 0$. 令

$$\phi(\varepsilon, z) = z + \varepsilon Z(z) \tag{5.72}$$

则对于 $|\varepsilon|$ 充分小，$\phi(\varepsilon, z)$ 是 Ω 上的微分同胚（参见 (4.14) 及其后说明）. 记

$$R^\varepsilon w = w \circ \phi(\varepsilon, \cdot), \quad w \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3). \tag{5.73}$$

显然，$R^\varepsilon w \to w$ 在 L^∞ 中. 利用换元积分法还可得

$$\langle \nabla R^\varepsilon w, \nabla R^\varepsilon v \rangle = \langle \nabla w, \nabla v \rangle + O(\varepsilon),$$

其中 $|O(\varepsilon)| \leq \varepsilon C \|\nabla w\| \|\nabla v\|$. 因此

$$\|\nabla R^\varepsilon w - \nabla w\|_2^2 \leq C\varepsilon \|\nabla w\|_2^2, \quad \forall\, w \in H^1(\Omega). \tag{5.74}$$

2. **基于山路引理的估计.**

引理 5.23 设 $g \in \mathscr{C}$，$\underline{u}$ 是对应于边值 g 的 Dirichlet 问题 (HD) 的劣解，那么存在适当小的常数 $B > 0$，使得 $\|\varphi\|_{H_0^1} \leq B\delta^{3/2}$ 时

$$\sup_{t \geq 0} J(\underline{u} + \varphi + tv) \geq A(g) \quad \forall\, v \in H_0^1,\ v \neq 0. \tag{5.75}$$

其中 δ 由引理 5.3 确定.

证明 由泛函 J 与 Φ 的关系，我们有

$$J(\underline{u} + \varphi + tv) = J(\underline{u}) + \Phi(\varphi + tv),$$

依命题 5.16，我们有

$$\sup_{t \geq 0} \Phi(\varphi + tv) \geq \frac{\lambda_g^3}{24H^2},$$

注意到 $A(g)$ 的表达式 (5.63)，便证得引理. □

3. **关键估计.**

引理 5.24 设 $g \in \mathscr{C}$，而 $\underline{u}$ 及 $\bar{u}$ 分别是问题 $(\mathrm{HD})_g$ 的劣解及优解，则

$$\sup_{t \geq 0} J(R^\varepsilon \underline{u} + tR^\varepsilon(\bar{u} - \underline{u})) \leq A(g) + \int |\nabla R^\varepsilon \bar{u}|^2 - \int |\nabla \bar{u}|^2 + O(\varepsilon^2).$$

证明 记 $v=\bar{u}-\underline{u}$，则根据 (5.62) 式有

$$v=-\frac{\lambda_g}{2H}\varphi^g,\quad W(v)=-\frac{1}{8H^3}\lambda_g^3,\quad T_{\underline{u}}(v)=\frac{1}{4H^2}\lambda_g^3.$$

依 $W(\cdot)$ 的微分同胚不变性，我们有（记 $\tau=t-1$）

$$\begin{aligned}
&J(R^\varepsilon\underline{u}+tR^\varepsilon v)=J(R^\varepsilon\bar{u}+\tau R^\varepsilon v)\\
&\quad=\frac{1}{2}\int|\nabla R^\varepsilon\bar{u}|^2+\tau\int\nabla R^\varepsilon\bar{u}\cdot\nabla R^\varepsilon v+\frac{\tau^2}{2}\int|\nabla v|^2+\frac{2H}{3}W(\underline{u}+tv)\\
&\quad\le\frac{1}{2}\left\{\int|\nabla R^\varepsilon\bar{u}|^2-\int|\nabla\bar{u}|^2\right\}+J(\underline{u}+tv)+C|\tau\varepsilon|+C\tau^2|\varepsilon|.
\end{aligned}$$

应用恒等式 (5.38)，关系式 $\bar{u}=\underline{u}+v$，并注意 $\bar{u}$ 是 $(\mathrm{HD})_g$ 的解，得

$$\begin{aligned}
J(\underline{u}+tv)&=J(\bar{u}+\tau v)\\
&=J(\bar{u})+\frac{\tau^2}{2}\{4HW(v)+T_{\underline{u}}(v)\}+\frac{2H\tau^3}{3}W(v)\\
&=A(g)-\frac{\lambda_g^3}{24H^2}\tau^2(3+2\tau).
\end{aligned}$$

注意到 $3+2\tau=2t+1\ge1$，我们有

$$\begin{aligned}
&J(R^\varepsilon\underline{u}+tR^\varepsilon v)\\
&\quad\le\frac{1}{2}\left\{\int|\nabla R^\varepsilon\bar{u}|^2-\int|\nabla\bar{u}|^2\right\}+A(g)-\frac{\lambda_g^3}{24H^2}\tau^2+C|\tau\varepsilon|+C\tau^2|\varepsilon|\\
&\quad\le\frac{1}{2}\left\{\int|\nabla R^\varepsilon\bar{u}|^2-\int|\nabla\bar{u}|^2\right\}+A(g)+C\varepsilon^2,\qquad(\,|\varepsilon|\text{ 充分小 }).
\end{aligned}$$

这里我们用到了 $J(\bar{u})=A(g)$，最后一式的估计是二次多项式的性质. □

4. 引理 5.22 的证明.

根据引理 5.21，存在 $g_0\in\mathscr{C}$ 使得 $A(g_0)=\inf_{g\in\mathscr{C}}A(g)$. 记 $\tilde{u}$ (相应地 $\underline{u}$) 为 Dirichlet 问题 $(\mathrm{HD})g_0$ 的优解 (相应地劣解). 我们需证明

$$\omega(\tilde{u})=|\tilde{u}_x|^2-|\tilde{u}_y|^2-2i\tilde{u}_x\cdot\tilde{u}_y=0.$$

为此，只需证明

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\int|\nabla R^\varepsilon\tilde{u}|^2=0,$$

或者

$$\int |\nabla R^\varepsilon \tilde{u}|^2 - \int |\nabla \tilde{u}|^2 \geq -C\varepsilon^2, \quad |\varepsilon| \text{ 充分小}. \tag{5.76}$$

令 $g_\varepsilon = R^\varepsilon g_0$，并记 $\underset{\sim}{u}_\varepsilon$ 为问题 (HD) 相应于边值 g_ε 的劣解. 那么，由 (5.74) 可以看出

$$g_\varepsilon \xrightarrow{s} g_0 \qquad \text{在 } H^{1/2}(\partial\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega) \text{ 中},$$

$$R^\varepsilon \underset{\sim}{u} \xrightarrow{s} \underset{\sim}{u} \qquad \text{在 } H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \text{ 中}.$$

故由极小解对初值的连续相依性，

$$\underset{\sim}{u}_\varepsilon \xrightarrow{s} \underset{\sim}{u} \quad \text{在 } H^1(\Omega) \text{ 中}. \tag{5.77}$$

由极小解 $\underset{\sim}{u}$ 的稳定性，我们有

$$\int |\nabla v|^2 + 4H \int \underset{\sim}{u} \cdot v_x \wedge v_y \geq \delta_0 \int |\nabla v|^2 \quad \forall\, v \in H_0^1, \tag{5.78}$$

依据 (5.77) 及 (5.78)，再由 Wente 不等式得

$$\int |\nabla v|^2 + 4H \int \underset{\sim}{u}_\varepsilon \cdot v_x \wedge v_y \geq \frac{1}{2}\delta_0 \int |\nabla v|^2 \quad \forall\, v \in H_0^1, \tag{5.79}$$

依引理 5.23，存在只依赖于 H 的常数 $\eta > 0$，使得

$$\begin{aligned} A(g_\varepsilon) \leq \sup_{t\geq 0} J(\underset{\sim}{u}_\varepsilon + \varphi + tv)) \quad & \forall\, v \in H_0^1,\ v \neq 0, \\ & \forall\, \varphi \in H_0^1,\ \|\nabla\varphi\|_2 \leq \eta. \end{aligned} \tag{5.80}$$

在 (5.80) 中取

$$\varphi = R^\varepsilon \underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{u}_\varepsilon, \qquad v = R^\varepsilon(\tilde{u} - \underset{\sim}{u}),$$

便得

$$A(g_\varepsilon) \leq \sup_{t\geq 0} J(R^\varepsilon \underset{\sim}{u} + tR^\varepsilon(\tilde{u} - \underset{\sim}{u})). \tag{5.81}$$

另一方面，根据 g_0 的定义，又有

$$A(g_0) \leq A(g_\varepsilon), \tag{5.82}$$

此外，应用关键引理，我们有

$$\sup_{t\geq 0} J(R^\varepsilon \underset{\sim}{u} + tR^\varepsilon(\tilde{u} - \underset{\sim}{u})) \leq A(g_0) + \int |\nabla R^\varepsilon \tilde{u}|^2 - \int |\nabla \tilde{u}|^2 + O(\varepsilon^2). \tag{5.83}$$

结合 (5.81), (5.82) 及 (5.83) 便得 (5.76). 引理到此证毕.

第五节　正则化及其它技术支持

本节我们将讨论 H 方程的正则化等技术性问题. 大部分内容出自 Bezis-Coron [48].

仍设 $\Omega=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$. 在本节中，$u, v, w$ 表示定义在 Ω 上，取值于 $\mathbb{R}^3$ 中的向量值函数，φ, g 等表示 Ω 上的实函数.

一、正则化

在讨论 H 方程解的正则化时，若将方程组写作分量形式，就是

$$\Delta u=2H\big(\{u^2,u^3\},\{u^3,u^1\},\{u^1,u^2\}\big),$$

其中 $u=(u^1,u^2,u^3)$，而 $\{f,g\}$ 表示映射 $\phi=(f,g)$ 的 Jocobi 行列式，即

$$\{f,g\}=f_xg_y-f_yg_x.$$

这导致研究一类更一般的边值问题

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi&=\{f,g\} && \text{在 } \Omega \text{ 中},\\ \varphi&=0 && \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{aligned} \tag{5.84}$$

以下介绍两种正则化方法，第一个是 Wente [208] 的方法，第二个是调和分析方法. 但不论哪种方法，都依赖于问题 (5.84) 的特殊结构，$\{u,v\}$ 具有散度结构:

$$\{f,g\}=(fg_y)_x-(fg_x)_y.$$

1. **Wente 的方法.**

引理 5.25 (Wente)　设 $f,\ g\in H^1(\Omega)$. 假定 $\varphi\in W_0^{1,1}(\Omega)$ 是边值问题 (5.84) 的唯一解，那么 $\varphi\in C(\overline{\Omega})\cap H_0^1(\Omega)$，且

$$\|\varphi\|_\infty+\|\nabla\varphi\|_2\le C\|\nabla f\|_2\|\nabla g\|_2.$$

证明　这里我们采用 Brezis-Coron [48] 所给证明. 先假定 $f,\ g\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ 并令

$$\psi=E*\{f,g\}=E*(f_xg_y-f_yg_x), \tag{5.85}$$

其中 $E(x,y)$ 是 Laplace 算子 $(-\Delta)$ 的基本解，

$$E(x,y)=\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{x^2+y^2}.$$

我们有

$$-\Delta\psi=\{f,g\}. \tag{5.86}$$

在极坐标系 (r,θ) 下，

$$-\Delta\psi=\frac{1}{r}\big(f_r g_\theta-f_\theta g_r\big)\quad 在\ \mathbb{R}^2\ 中.$$

从而由 (5.85)

$$\begin{aligned}\psi(0)&=\frac{1}{2\pi}\iint\Big(\log\frac{1}{r}\Big)\big(f_r g_\theta-f_\theta g_r\big)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\iint\Big(\log\frac{1}{r}\Big)\big((fg_\theta)_r-(fg_r)_\theta\big)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\iint\Big(\log\frac{1}{r}\Big)(fg_\theta)_r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

分部积分得

$$\psi(0)=\frac{1}{2\pi}\iint\frac{1}{r}(fg_\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta. \tag{5.87}$$

但

$$\int_0^{2\pi}fg_\theta\,\mathrm{d}\,\theta=\int_0^{2\pi}(f-\bar{f})g_\theta\,\mathrm{d}\,\theta,$$

其中

$$\bar{f}(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\sigma)\,\mathrm{d}\,\sigma.$$

这样，由 Hölder 不等式便有

$$\left|\int_0^{2\pi}fg_\theta\,\mathrm{d}\theta\right|\le\|f-\bar{f}\|_{L^2(0,2\pi)}\|g_\theta\|_{L^2(0,2\pi)}, \tag{5.88}$$

对于每个固定的 $r>0$，由 $f(r,\cdot)-\bar{f}$ 的 Fourier 展式易见

$$\|f-\bar{f}\|_{L^2(0,2\pi)}\le\|f_\theta\|_{L^2(0,2\pi)} \tag{5.89}$$

由 (5.87), (5.88) 与 (5.89) 得

$$
\begin{aligned}
|\psi(0)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \|f_\theta\|_{L^2(0,2\pi)}\|g_\theta\|_{L^2(0,2\pi)}\frac{1}{r}\mathrm{d}r \\
&\le \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\infty \|f_\theta\|^2_{L^2(0,2\pi)}\frac{\mathrm{d}r}{r}\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty \|g_\theta\|^2_{L^2(0,2\pi)}\frac{\mathrm{d}r}{r}\right)^{1/2} \\
&\le \frac{1}{2\pi}\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\nabla g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned}
$$

根据 (5.86) 的平移不变性，将上式中的 $\psi(0)$ 换作 $\psi(z)$，不等式仍成立. 故有

$$
\|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \le \frac{1}{2\pi}\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\nabla g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{5.90}
$$

此外，从 (5.84) 及 (5.86) 得

$$
\Delta(\varphi-\psi)=0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 上},
$$

应用极大值原理

$$
\|\varphi-\psi\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|\varphi-\psi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} = \|\psi\|_{L^\infty(\partial\Omega)}
$$

从而有

$$
\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \le 2\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} \le \frac{1}{\pi}\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\nabla g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.
$$

用 φ 乘方程 (5.84)，我们得

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 &= \int_\Omega \varphi\cdot\left(f_x g_y - f_y g_x\right) \\
&\le \|\varphi\|_\infty\|\nabla f\|_2\|\nabla g\|_2 \le \frac{1}{\pi}\|\nabla f\|_2^2\|\nabla g\|_2^2.
\end{aligned}
$$

对于一般情形 $f,\ g\in H^1(\Omega)$，我们可将它们扩张为 $\tilde f,\ \tilde g\in H^1(\mathbb{R}^2)$，使得

$$
\|\tilde f\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \le C\|f\|_{H^1(\Omega)}, \qquad \|\tilde g\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \le C\|g\|_{H^1(\Omega)} \tag{5.91}
$$

根据稠密性可推出 $\varphi\in C(\overline{\Omega})\cap H_0^1(\Omega)$ 且

$$
\begin{aligned}
\|\varphi\|_\infty + \|\nabla\varphi\|_2 &\le C\|\nabla\tilde f\|_{2,\mathbb{R}^2}\|\nabla\tilde g\|_{2,\mathbb{R}^2} \\
&\le C\|f\|_{H^1(\Omega)}\|g\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}
$$

最后，若记 $\bar{f}$ 为函数 f 在 Ω 上的平均值，那么当 f, g 分别换作 $f-\bar{f}$ 及 $g-\bar{g}$ 时，$\{f,g\}=\{f-\bar{f},g-\bar{g}\}$，因而 φ 保持不变，应用 Poincaré 不等式便完成引理的证明. □

2. **调和分析方法**.

对于 $u, v\in H^1$，我们知道 $\{u,v\}\in L^1$，这对于问题 (5.84) 的正则化来说是不够的. 不过，Coifman-Lions-Meyer-Semmes [79] 在其开拓性工作中指出，实际上 $\{u,v\}$ 属于 Hardy 空间 $\mathcal{H}^1$，它是 L^1 的严格子空间. $\{u,v\}$ 的这一属性足以给出边值问题 (5.84) 的正则性.

Hardy 空间及其对偶 BMO($\mathbb{R}^n$) 的这一成功应用，促进了它自身的发展，Coifman-Lions-Meyer-Semmes [79] 的方法被用以解决具有类似结构方程的解的正则化（参见 Steffen [190], Helein [117], [118], Zheng [217], 丁-陆 [226]）.

引理 5.26 (Coifman-Lions-Meyer-Semmes [79]) 设 $f,g\in H^1(\mathbb{R}^2)$，则 $\{f,g\}\in\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$，且

$$\|\{f,g\}\|_{\mathcal{H}^1}\le C\|\nabla f\|_2\|\nabla g\|_2,\quad \forall\, f,g\in H^1(\mathbb{R}^n). \tag{5.92}$$

证明 取 $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\operatorname{sppt}\phi\subset\{x:|x|\le 1\}$ 且 $\int\phi=1$. 对于任意缓增广义函数 $h\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$，$h$ 关于 ϕ 的径向极大函数定义为

$$m_\phi(h)(z)=\sup_{r>0}|h*\phi_r(z)|.$$

其中 $\phi_r(z)=r^{-2}\phi(z/r)$. 对于 $f,g\in H^1$，根据 Hardy 空间 $\mathcal{H}^1$ 的极大函数刻划，我们需证明 $\{f,g\}$ 的极大函数 $m_\phi\{f,g\}\in L^1$. 首先，注意以下两点：

$$\{f,g\}=\{f-a,g\},\quad 及\quad |\nabla\phi_r(z)|\le Cr^{-3},$$

其中 a 是常数. 由分部积分得（下式中 $\nabla^\perp g=(g_y,-g_x)$）

$$\begin{aligned}m_\phi\{f,g\}(z)&=\sup_{r>0}\left|\int_{\mathbb{R}^2}\{f-\bar{f}_{B_{r,z}},g\}(\xi)\phi_r(z-\xi)\,\mathrm{d}\xi\right|\\&=\sup_{r>0}\left|\int_{B_{r,z}}(f-\bar{f}_{B_{r,z}})\nabla^\perp g\cdot\nabla\phi_r(z-\xi)\,\mathrm{d}\xi\right|\\&\le\sup_{r>0}\frac{C}{r^3}\int_{B_{r,z}}|f-\bar{f}_{B_{r,z}}||\nabla g|\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

这里 $B_{r,z}$ 表示圆心、半径分别为 z 与 r 的圆盘；$\bar{f}_{B_{r,z}}$ 表示 f 在圆盘 $B_{r,z}$ 上的平均值. 取实数 $p>2$ 并令 $p'=p/(p-1)$. 于是由 Hölder 不等式得

$$m_\phi\{f,g\}(z)\le \sup_{r>0}\frac{C}{r^3}\Big(\int|f-\bar{f}_{B_{r,z}}|^p\Big)^{1/p}\Big(\int|\nabla g|^{p'}\Big)^{1/p'}.$$

令 $s=2p/(2+p)$，即 $p=2s/(2-s)$，则 $1<s<2$, $1<p'<2$. 将 Poincaré 不等式与 Sobolev 嵌入结合起来，我们有

$$\Big(\int_{B_{r,z}}|f-\bar{f}_{B_{r,z}}|^p\Big)^{1/p}\le C\Big(\int_{B_{r,z}}|\nabla f|^s\Big)^{1/s},\quad \forall f\in H^1(B_{r,z}).$$

注意，嵌入 $W^{1,s}\hookrightarrow L^p$ 是临界的，上述不等式具有平移不变性及伸缩不变性，常数 C 与 $B_{r,z}$ 无关. 因而，由于 $\frac{2}{s}+\frac{2}{p'}=3$，我们有

$$m_\phi\{f,g\}(z)\le C\sup_{r>0}\Big(\frac{1}{|B_{r,z}|}\int|\nabla f|^s\Big)^{1/s}\Big(\frac{1}{|B_{r,z}|}\int|\nabla g|^{p'}\Big)^{1/p'}.$$

由 Hardy-Littlewood 极大函数的定义，上式即

$$m_\phi\{f,g\}(z)\le C\big[M(|\nabla f|^s)\big]^{1/s}\big[M(|\nabla g|^{p'})\big]^{1/p'}. \tag{5.93}$$

由于极大算子 $M:L^p\to L^p$ （$p>1$）是连续映射 (见 p.331 定理 C.4)，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^2}\big[M(|\nabla f|^s)\big]^{2/s}\le C\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla f|^2,\quad \int_{\mathbb{R}^2}\big[M(|\nabla g|^{p'})\big]^{2/p'}\le C\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla g|^2.$$

于是 (5.93) 及 Schwartz 不等式隐含 $m_\phi\{f,g\}\in L^1$，且

$$\int_{\mathbb{R}^2}m_\phi\{f,g\}\le C\|\nabla f\|_2\,\|\nabla g\|_2,\quad \forall f,g\in H^1,$$

即 (5.92) 成立. □

现在我们利用 Hardy 空间的有关结论给出边值问题 (5.84) 解的正则化.

Wente 引理的证明 II 将 f,g 扩张为 $\tilde f,\tilde g\in H^1(\mathbb{R}^2)$ 使其满足 (5.91). 如同 (5.85)，仍记 $\psi=E*\{\tilde f,\tilde g\}$. 因 $E\in\mathrm{BMO}$，$\{\tilde f,\tilde g\}\in\mathcal{H}^1$，根据著名的 Fefferman 对偶定理，我们有

$$|\psi(z)|\le C\|E(\cdot-z)\|_{\mathrm{BMO}}\,\|\{\tilde f,\tilde g\}\|_{\mathcal{H}^1},$$

但由于平移不变性，$\|E(\cdot - z)\|_{\mathrm{BMO}} = \|E(\cdot)\|_{\mathrm{BMO}}$，故由 Coifman-Lions-Meyer-Semmes 引理，

$$|\psi(z)| \le C\|\nabla f\|_2\|\nabla g\|_2, \quad \forall\, z \in \mathbb{R}^2.$$

在 Ω 内，$\Delta(\varphi - \psi) = 0$，我们可以应用极大值原理，如同证明 I，完成 Wente 引理其余部分的证明. □

二、恒等式与不等式

1. 恒等式.

引理 5.27 设 $u, v \in H^1 \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$，$w \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$，如果在边界上 $w|_{\partial\Omega} = 0$ 或 $(u \wedge v)|_{\partial\Omega} = 0$，那么成立下列恒等式

$$\int_\Omega u \cdot \big[(v_x \wedge w_y) + (w_x \wedge v_y)\big] = \int_\Omega v \cdot \big[(u_x \wedge w_y) + (w_x \wedge u_y)\big].$$

证明 (α) 假定在边界 $\partial\Omega$ 上，$w = 0$，即 $w \in H_0^1$，根据稠密性，不妨设 $u, v \in \mathscr{D}(\Omega)$. 取二维向量场 $X = \big(w \cdot (u \wedge v)_y,\, w \cdot (v \wedge u)_x\big)$，那么

$$\operatorname{div} X = w_x \cdot (u \wedge v)_y + w_y \cdot (v \wedge u)_x,$$

应用散度定理，$\int_\Omega \operatorname{div} X = 0$，整理后得

$$\int_\Omega u \cdot \big[(v_x \wedge w_y) + (w_x \wedge v_y)\big] = \int_\Omega v \cdot \big[(u_x \wedge w_y) + (w_x \wedge u_y)\big]. \tag{5.94}$$

(β) 假定在边界 $\partial\Omega$ 上，$u \wedge v = 0$，根据稠密性，不妨设 $w \in C^\infty(\overline{\Omega})$. 与情形 (α) 不同的是，现在取二维向量场 $\widetilde{X} = \big(w_y \cdot (u \wedge v),\, w_x \cdot (v \wedge u)\big)$，简单计算可得

$$\operatorname{div} \widetilde{X} = w_x \cdot (u \wedge v)_y + w_y \cdot (v \wedge u)_x$$

应用散度定理，仍得 (5.94). □

在上述引理中令 $w = v$，我们有

引理 5.28 设 $u, v \in H^1 \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$，在边界 $\partial\Omega$ 上，$(u \wedge v)|_{\partial\Omega} = 0$，则

$$2\int_\Omega u \cdot (v_x \wedge v_y) = \int_\Omega v \cdot \big[(u_x \wedge v_y) + (v_x \wedge u_y)\big]. \tag{5.95}$$

2. 不等式. 仍使用记号 $\{f,g\}=f_xg_y-f_yg_x$，首先我们有下列

引理 5.29 设实数值函数 $f,\ g\in H^1(\Omega)$, $\quad h\in\mathscr{D}(\Omega)$，那么成立不等式

$$\left|\int_\Omega\{f,g\}w\right|\le C\|\nabla f\|_2\,\|\nabla g\|_2\,\|\nabla h\|_2.$$

证明 设 φ 是下列方程的解：

$$\begin{aligned}-\Delta\varphi&=\{f,g\}\qquad\text{在 }\Omega\text{ 中},\\ \varphi&=0\qquad\qquad\text{在 }\partial\Omega\text{ 上}.\end{aligned}\tag{5.84}$$

用 h 乘方程 (5.84) 两边，依次用 Green 公式，Hölder 不等式，及 Wente 引理 (引理 5.25) 推得

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega\{f,g\}h\right|=\left|\int_\Omega\nabla\varphi\cdot\nabla h\right|&\le\|\nabla\varphi\|_2\,\|\nabla h\|_2\\ &\le C\|\nabla f\|_2\|\nabla g\|_2\|\nabla h\|_2.\end{aligned}$$

引理 5.30 设向量值函数 $u\in H^1(\Omega)$, $\quad w\in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$，那么

$$\left|\int_\Omega(u_x\wedge u_y)\cdot w\right|\le C\|\nabla w\|_2\,\|\nabla u\|_2^2.$$

证明 记 $u=(u^1,u^2,u^3)$，我们注意

$$u_x\wedge u_y=\big(\{u^2,u^3\},\{u^3,u^1\},\{u^1,u^2\}\big).$$

当 $w\in\mathscr{D}(\Omega)$ 时，分别对 $u_x\wedge u_y$ 的三个分量应用引理 5.29 便得结论．对于一般情形，$w\in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$，取一序列 $w^k\in\mathscr{D}(\Omega)$ 使得

$$w^k\xrightarrow{s}w\ (H^1),\quad w^k\xrightarrow{p.p.}w,\quad \|w^k\|_\infty\le C.$$

最后取极限 (用控制收敛定理) 便证得引理. □

引理 5.31 设向量值函数 $u\in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$，$v\in H_0^1(\Omega)$，那么

$$\left|\int_\Omega u\cdot(v_x\wedge v_y)\right|\le C\|\nabla u\|_2\,\|\nabla v\|_2^2.$$

证明 先假定 $v \in \mathscr{D}(\Omega)$，由引理 5.28，我们有

$$\int u \cdot (v_x \wedge v_y) = \frac{1}{2}\int_\Omega v \cdot \big[(u_x \wedge v_y) + (v_x \wedge u_y)\big]$$
$$= \frac{1}{2}\int_\Omega v \cdot \big[(u+v)_x \wedge (u+v)_y - u_x \wedge u_y - v_x \wedge v_y\big]$$

由此，根据引理 5.30 得

$$\left|\int_\Omega u \cdot (v_x \wedge v_y)\right| \le C\|\nabla v\|_2\big(\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2\big).$$

在上式中将 v 用 λv 替换，其中 $\lambda = \|\nabla u\|/\|\nabla v\|$，得到

$$\left|\int_\Omega u \cdot (v_x \wedge v_y)\right| \le C\|\nabla u\|_2\|\nabla v\|_2^2, \quad \forall v \in \mathscr{D}(\Omega).$$

根据稠密性，上式对所有 $v \in H_0^1(\Omega)$ 成立. □

三、各种收敛性

引理 5.32 设有 Ω 上的两个向量值函数列 $\{u^n\}$ 与 $\{v^n\}$，满足

$$u^n \in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega), \quad v^n \in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega);$$
$$u^n \wedge v^n = 0 \quad 在\ \partial\Omega\ 上;$$
$$\|u^n\|_{H^1} \le C, \quad \|v^n\|_{H^1} \le C, \quad \|v^n\|_\infty \to 0.$$

那么

$$\int_\Omega u^n \cdot (v_x^n \wedge v_y^n) \to 0.$$

证明 应用引理 5.28，我们有

$$\int_\Omega u^n \cdot (v_x^n \wedge v_y^n) = \frac{1}{2}\int_\Omega v^n \cdot \big[(u_x^n \wedge v_y^n) + (v_x^n \wedge u_y^n)\big]$$
$$\le C\|v^n\|_\infty\|\nabla u^n\|_2\|\nabla v^n\|_2 \to 0.$$

引理由此得证. □

引理 5.33 设向量值函数 $\gamma \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. 假定两个向量值函数列 $\{u^n\}$ 与 $\{v^n\}$ 满足

$$u^n \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad v^n \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega);$$

$$u^n = \gamma \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad \text{其中 } \gamma \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega);$$

$$\|u^n\|_{H^1} \le C, \quad \|v^n\|_{H^1} \le C, \quad \|v^n\|_\infty \to 0.$$

那么

$$\omega_n = \int_\Omega u^n \cdot \left[(u_x^n \wedge v_y^n) + (v_x^n \wedge u_y^n)\right] \to 0.$$

证明 令 $\varphi^n = u^n - \gamma$, 那么 $\varphi^n \in H_0^1(\Omega)$, $\|\varphi^n\|_{H^1} \le C$. 我们有

$$\begin{aligned}\omega_n &= \int_\Omega (\varphi^n + \gamma) \cdot \left[(\varphi_x^n + \gamma_x) \wedge v_y^n + v_x^n \wedge (\varphi_y^n + \gamma_y)\right] \\ &= \int_\Omega \varphi^n \cdot \left[\varphi_x^n \wedge v_y^n + v_x^n \wedge \varphi_y^n\right] + \int_\Omega \varphi^n \cdot \left[\gamma_x \wedge v_y^n + v_x^n \wedge \gamma_y\right] \\ &\quad + \int_\Omega \gamma \cdot \left[\varphi_x^n \wedge v_y^n + v_x^n \wedge \varphi_y^n\right] + \int_\Omega \gamma \cdot \left[\gamma_x \wedge v_y^n + v_x^n \wedge \gamma_y\right].\end{aligned}$$

应用引理 5.27 得

$$\begin{aligned}\omega_n = 2\int_\Omega v^n \cdot \left[\varphi_x^n \wedge \varphi_y^n + \gamma_x \wedge \varphi_y^n + \varphi_x^n \wedge \gamma_y\right] \\ + \int_\Omega \gamma \cdot \left[\gamma_x \wedge v_y^n + v_x^n \wedge \gamma_y\right].\end{aligned}$$

由于 v^n 在 $H^1(\Omega)$ 中弱收敛于 0, $\|v^n\|_\infty \to 0$, 故由上式得到引理结论. □

引理 5.34 设向量值函数 $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, 向量值函数列 $v^n \in H_0^1(\Omega)$ 满足

$$v^n \xrightarrow{w} v \quad \text{在 } \in H_0^1(\Omega) \text{ 中}$$

那么

$$\int_\Omega u \cdot (v_x^n \wedge v_y^n) \to \int_\Omega u \cdot (v_x \wedge v_y).$$



数量曲率型问题

第六章 RIEMANN 几何简述

作为下两章的预备，本章主要叙述 Riemann 流形的基本概念以及将会涉及到的若干定理，这些内容可在陈维桓李兴校 [220] 中找到，简明地，也可参阅 Aubin [5] 的有关章节.

第一节 RIEMANN 流形

一、微分流形

1. 拓扑流形. 一个 n 维 拓扑流形 M 是一个 Hausdorff 拓扑空间，其中 M 的每个点 P 都有一个开邻域 U 与 $\mathbb{R}^n$ 的一个开集 Ω 同胚. 邻域 U 及同胚映射 $\varphi : U \to \Omega$ 一起构成 M 的一个坐标卡 (U, φ).

因 n 维拓扑流形 M 是局部与 $\mathbb{R}^n$ 同胚的 Hausdorff 空间，因而是局部紧致并且局部连通的.

满足 $\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}} U_\alpha = M$ 的坐标卡的集合 $\mathscr{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \mathscr{A}\}$ 叫做 M 的一个 坐标覆盖.

2. 微分流形. M 的两个坐标卡 (U, φ) 和 (V, ψ) 称为是 C^k (C^∞) 相容的，如果当 $U \cap V \neq \emptyset$ 时，映射 $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ 是一个 C^k (C^∞) 微分同胚.

M 的一个坐标覆盖如果满足 C^k (C^∞) 相容条件，就称之为 M 的一个 C^k (C^∞) 坐标覆盖.

一个 n 维 C^k (C^∞) 微分流形指的是具有 C^k (C^∞) 坐标覆盖 $\mathscr{U}$ 的 n 维拓扑流形. 其中所有与 $\mathscr{U}$ 相容的坐标覆盖一起构成 M 的一个 C^k (C^∞) 微分结构. 今后所说的流形都是具有固定微分结构的微分流形.

设 (U,φ) 是 n 维流形 M 的一个坐标卡，对于任意 $P\in U$，我们把 $x=\varphi(P)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的坐标 $(x^1(P),\cdots,x^n(P))$ 称为点 P 的*局部坐标*. 以这样的方式在 U 上确定了一个坐标系，称为点 P 的*局部坐标系*，记为 (U,φ,x^i) 或 (U,x^i).

设 (U,φ,x^i) 及 (V,ψ,y^i) 是 n 维流形 M 的两个坐标卡，$U\cap V\neq\emptyset$，称映射 $\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$ 为从 (U,φ,x^i) 到 (V,ψ,y^i) 的局部坐标变换，写成坐标形式就是

$$y^i=(\psi\circ\varphi^{-1})^i=y^i(x^1,\cdots,y^n),\quad 1\le i\le n.$$

称行列式 $\det(\partial y^i/\partial x^j)$ 为局部坐标变换 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 的 *Jocobi 行列式*.

微分流流形 M 称为是*可定向的*，如果 M 具有这样的一个坐标覆盖，其中任意两个相交的坐标卡间的局部坐标变换的 Jocobi 行列式保持定号. 因此，可定向的微分流形恰有两个定向.

3. 切向量与切空间.

设 f 为 C^k 微分流形 M 的点 P 的邻域内的实函数，我们说 $f\in C_P^r$ $(r\le k)$，如果 f 在点 P 的某局部坐标系 (U,φ,x^i) 中满足 $f\circ\varphi^{-1}\in C^r(U)$.

流形 M 在点 P 的一个*切向量*是一个映射 $X:C_P^\infty\to\mathbb{R}$，满足

(a) $X(\lambda f+\mu g)=\lambda Xf+\mu Xg,\quad \forall f,\, g\in C_P^\infty,\ \forall\lambda,\,\mu\in\mathbb{R}$;

(b) $X(fg)=(Xf)g(P)+f(P)(Xg)\quad \forall f,\, g\in C_P^\infty$.

点 $P\in M$ 的所有切向量构成的实向量空间 T_PM 叫做 P 点的*切空间*. 在 P 点的局部坐标系 (U,φ,x^i) 中，切向量 $\partial/\partial x^i$（简记为 ∂_i）定义如下

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_P f=\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(P)),\quad 1\le i\le n,$$

∂_i $(1\le i\le n)$ 构成 T_PM 的一个基.

过 $P\in M$ 的任一条曲线 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$，$\gamma(0)=P$，按如下方式定义一个切向量 $(\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t)_P\in T_PM$，称为曲线 γ 在点 P 的切向量：

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\Big|_P f=\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0},\quad \forall f\in C^\infty(M).$$

切空间 T_PM 的对偶空间称为 P 点的*余切空间*，记为 T_P^*M，其中的每个元素叫做 P 点的*余切向量*.

T_PM 与 T_P^*M 之间的匹配记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle : T_PM \times T_P^*M \to \mathbb{R}$. 对于每一个 $f \in C_P^\infty$，我们定义余切向量 $\mathrm{d}f|_P \in T_P^*M$ 如下

$$\langle X, \mathrm{d}f|_P\rangle = \mathrm{d}f|_P(X) = Xf, \quad \forall X \in T_PM,$$

称为 f 在 P 点的 *微分*.

在点 P 的局部坐标系 (U, x^i) 下，我们有

$$\langle \partial/\partial x^j|_P, \mathrm{d}x^i|_P\rangle = \partial x^i/\partial x^j|_P = \delta_j^i,$$

因此 $\{\mathrm{d}x^i|_P\}_1^n$ 构成 T_P^*M 的一个自然基底. 对于 $f \in C_P^\infty$，我们有

$$\mathrm{d}f|_P = \sum(\partial f(P)/\partial x^i)\mathrm{d}x^i|_P.$$

设 M, V 分别是 n, m 维光滑流形，$F : M_n \to V_m$ 是光滑映射，$p \in M_n$. F 诱导一个从 T_PM 到 $T_{F(P)}V$ 的映射 F_*，称为 *切映射*，定义为

$$F_*(X)(f) = X(f \circ F), \quad \forall f \in C_{F(P)}^\infty, \forall X \in T_PM.$$

F 同时诱导一个从 $T_{F(P)}^*V$ 到 T_P^*M 的映射 F^*，称为 *余切映射*或 *拉回映射*，定义为

$$F^*(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(f \circ F), \quad \forall f \in C_{F(P)}^\infty.$$

容易验证，对于 $X \in T_PM$, $\omega \in T_{F(P)}^*V$ 成立

$$\langle X, F^*(\omega)\rangle = \langle F_*(X), \omega\rangle.$$

$TM = \bigcup_{p\in M} T_PM$ 叫做 M 的切空间，它具有一个自然的纤维丛结构，称之为切丛. 类似地，$T^*M = \bigcup_{p\in M} T_P^*M$ 叫做 M 的 *余切空间*，也有一个自然的纤维丛结构，称之为余切丛.

一个光滑 *切向量场* X 是从 M 到切丛 TM 的光滑映射，使得对于 M 中的每一点 P 都有 $X(P) \in T_PM$. 在局部坐标系 (U, x^i) 下，X 有局部表示

$$X|_U = \sum X^i(\partial/\partial x^i),$$

其中 X^i 是 U 上的光滑函数. M 上所有光滑切向量场记为 $\mathfrak{X}(M)$.

两个切向量场 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ 的 *Poisson 括号积*定义为

$$[X, Y] = XY - YX.$$

4. 张量.

设 v^*, $w^* \in T_P^*M$，它们的张量积 $v^* \otimes w^*$ 是 $T_pM \times T_PM$ 上的线性泛函，定义为

$$v^* \otimes w^*(v, w) = v^*(v) \cdot w^*(w) = \langle v, v^* \rangle \langle w, w^* \rangle, \quad \forall\, v,\, w \in T_pM.$$

每一个形如 $v^* \otimes w^*$ 的有限线性组合叫做一个二阶协变张量或 $(0, 2)$ 型张量. 全体 $(0, 2)$ 型张量记为 $T_p^*M \otimes T_P^*M$.

一般地，M 在点 P 点的一个 (r, s) 型张量 τ 是指一个 $r + s$ 重线性映射

$$\tau : \overset{r}{\times}\, T_P^*M \overset{s}{\times}\, T_PM \to \mathbb{R},$$

其中 r 称为 τ 的反变阶数，s 称为 τ 的协变阶数. P 点的全体 (r, s) 型张量记为 $T_s^r(P)$. 我们有

$$T_s^r(P) = \overset{r}{\otimes}\, T_PM \overset{s}{\otimes}\, T_P^*M.$$

$T_s^rM = \bigcup_{P \in M} T_s^r(P)$ 叫做 (r, s) 型张量空间，依然，它有一个自然的纤维从结构.

一个 (r, s) 型光滑张量场 τ 是张量丛 T_s^rM 的光滑截面，使得对于 M 中的每一点 P 都有 $\tau(P) \in T_s^rM$. 在点 P 的局部坐标系 (U, x^i) 下，τ 具有局部表示

$$\tau|_U = \tau_{j_1, \cdots, j_s}^{i_1, \cdots, i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_s},$$

其中 $\tau_{j_1, \cdots, j_s}^{i_1, \cdots, i_r}$ 是 U 上的光滑函数.

在 T_r^sM $(r, s \geq 1)$ 上，一个基本运算就是 缩并，$C : T_r^sM \to T_{r-1}^{s-1}M$. 一个 $(1, 1)$ 型张量（常 $\tau = \tau_i^j(\partial_i) \otimes dx^j$ 的缩并是一个数量（常，$C(\tau) = \tau_i^i$. 一个 $(1, 2)$ 型张量（常 $\tau = \tau_{ij}^k(\partial_i) \otimes (\partial_j) \otimes dx^k$ 关于第一个下标及上标的缩并是一个一阶协变张量（常，$C(\tau) = \tau_{ij}^i dx^j$.

5. 外微分式.

光滑流形 M 上的 r 阶协变张量场 φ 称为是 反对称的，如果作为 r 重线性映射

$$\varphi : \overset{r}{\times}\, \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M),$$

关于所有自变量是反对称的，即交换任意两个自变量的位置，所得之值反号，在局部坐标系中，φ 的分量关于下指标是反对称的.

类似地，我们可以给出对称张量的概念.

光滑反对称的 r 阶协变张量场 φ 称为是流形 M 上的一个 r 次 外微分式. 同时约定，流形 M 上的 1 次外微分式就是 M 上的 1 次微分，即光滑的一阶协变张量常约定流形 M 上的 0 次外微分式为 M 上的光滑函数. 所有 r 次外微分式的集合记作 $A^r(M)$.

$A^r(M)$ 上有一个自然的线性空间结构. 此外，外微分式间还可引进外积运算. 设 $\varphi \in A^r(M)$，$\psi \in A^s(M)$，定义

$$\varphi \wedge \psi = \frac{(r+s)!}{r!\,s!} A_{r+s}(\varphi \otimes \psi),$$

其中 A_{r+s} 是反对称化算子. 显然 $\varphi \wedge \psi \in A^{r+s}(M)$.

在外微分式上可唯一定义 外微分算子 $\mathrm{d} : A^r(M) \to A^{r+1}(M)$，使得

(a) $\mathrm{d}(\varphi + \psi) = \mathrm{d}\varphi + \mathrm{d}\psi, \quad \varphi, \psi \in A^r(M)$;

(b) 当 $f \in A^0(M) = C^\infty(M)$ 时，$\mathrm{d}f$ 是 f 的微分;

(c) $\mathrm{d}(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{d}\varphi \wedge \psi + (-1)^r \varphi \wedge \mathrm{d}\psi$，$\forall \varphi \in A^r(M), \forall \psi \in A^s(M)$;

(d) $\mathrm{d}^2 = \mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$ (Poincaré 引理).

二、Riemann 流形

1. **Riemann 度量**. 设 M 是 n 维光滑流形，一个 *Riemann 度量* g 是 M 上既对称又正定的二阶协变张量常即对于任意 $p \in M$，$X, Y \in T_pM$ 都有

$$g_p(X,Y) = g_p(Y,X), \quad g_p(X,X) > 0, \quad X \neq 0.$$

指定了 Riemann 度量 g 的流形 M 叫做 *Riemann 流型*，记为 (M,g). Riemann 度量在 T_pM 上诱导一个内积，$\langle X,Y \rangle_g = g_p(X,Y)$，$|X|_g = \langle X,X \rangle_g^{1/2}$.

一个仿紧的光滑流形一定存在 Riemann 度量.

设 $\gamma : [a,\, b] \to M$ 是 Riemann 流形 (M,g) 上的一条可微曲线，定义 γ 的长度为

$$L(\gamma) \triangleq \int_a^b \left| \frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} \right|_g \mathrm{d}t.$$

由于 (M,g) 的任意两点 P, Q 都可以用可微曲线连接，定义 P, Q 间的距离为

$$\mathrm{dist}(P,Q) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ 为连接 } P,\ Q \text{ 的可微曲线}\}.$$

规定这样的距离后，(M,g) 成为度量空间，且与流形原来的的拓扑等价.

第二节 联 络

一、仿射联络

为了对流形上的张量场进行微分，须在流形上引进一种称之为联络的结构.

一个仿射联络或联络 D 是从 $TM\times\mathfrak{X}(M)$ 到 TM 的双线性映射，使得

(a) $\mathrm{D}(X_P,Y)=\mathrm{D}_{X_P}(Y)\in T_PM$，如果 $X_P\in T_P$；

(b) 如果 f 是一可微函数，那么

$$\mathrm{D}_{X_P}(fY)=X_P(f)Y+f(P)\mathrm{D}_{X_P}(Y).$$

$\mathrm{D}_{X_P}(Y)$ 称为向量场 Y 在点 P 处沿方向 X_P 的协变导数，或绝对微商.

在局部坐标系 (U,x^i) 下，给定联络 D，记 $\nabla_iY=\mathrm{D}_{\partial/\partial x_i}Y$，假定

$$\nabla_i\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)=\Gamma_{ji}^k\frac{\partial}{\partial x^k},$$

函数 Γ_{ij}^k 叫做局部坐标系 (U,x^i) 下联络 D 的 *Christoffel* 记号或联络系数.

仿紧的光滑流形上一定存在联络，但一般来说不唯一. 在局部，从而在整体上由联络系数唯一确定.

联络 D 的系数 Γ_{ij}^k 不适合张量的变换规律，但若记 $T_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k-\Gamma_{ij}^k$，则 T_{ij}^k 适合 $(1,2)$ 型张量的变换规律，即

$$T=T_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k}\otimes\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j$$

是 $(1,2)$ 型张量常称为联络 D 的挠率张量. T 作为 $(1,2)$ 型张量可看作是映射 $T:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$，它满足

$$T(X,Y)=\mathrm{D}_XY-\mathrm{D}_YX-[X,Y].$$

在仿射流形 (M,D) 上，如果挠率张量 $T=0$，则称 D 是无挠联络.

按照下列方式，协变导数的定义可扩充到任意张量常

(a) 对于可微函数 f，$\mathrm{D}_X f = X(f)$；

(b) D_X 保持张量的型不变；

(c) D_X 与张量的缩并运算 C 可交换，即对于 M 上的张量场 $\mathcal{T}$，成立

$$\mathrm{D}_X(C(\mathcal{T})) = C(D_X\mathcal{T});$$

(d) $\mathrm{D}_X(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2) = (D_X\mathcal{T}_1) \otimes \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_1 \otimes (D_X\mathcal{T}_2)$.

二、Riemann 联络

1. 相容性条件. Riemann 流形 (M, g) 上的一个联络 D 叫做与度量 g 相容的，如果度量张量 g 沿任一向量场 X 的协变微商为零，即 $\mathrm{D}_X g = 0$. 相容性条件等价于，对于任意 $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$，成立

$$X\langle V, W\rangle_g = \langle \mathrm{D}_X V, W\rangle_g + \langle V, \mathrm{D}_X W\rangle_g. \tag{6.1}$$

Riemann 几何的基本定理表明，一个 n 维 Riemann 流形 (M, g) 上存在唯一的一个与度量 g 相容的无挠联络 D，称为 (M, g) 的 *Levi-Civita* 联络，也叫 *Riemann* 联络.

在 p 点的局部坐标系 (U, x^i) 下，记 $g_{ij} = g_p(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j)$，我们来计算 Christoffel 记号 Γ_{ij}^k. 无挠表明 $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$，由相容推出

$$\begin{aligned}
\nabla_k g_{ij} &= \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^l g_{jl} - \Gamma_{kj}^l g_{il} = 0, \\
\nabla_i g_{jk} &= \partial_i g_{jk} - \Gamma_{ik}^l g_{jl} - \Gamma_{ij}^l g_{kl} = 0, \\
\nabla_j g_{ik} &= \partial_j g_{ik} - \Gamma_{jk}^l g_{il} - \Gamma_{ji}^l g_{kl} = 0.
\end{aligned}$$

将以上后两式相加，然后减去第一式，得到

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2}\left[\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}\right] g^{kl}, \tag{6.2}$$

其中 (g^{kl}) 是 (g_{ij}) 的逆矩阵. 由此得无挠联络的存在唯一性.

2. **法坐标系.**

Riemann 流形 (M,g) 上点 P 的法坐标系是一局部坐标系 (U,x^i)，满足

$$g_{ij}(P)=\delta_i^j,\quad \forall\, i,\, j;$$
$$\partial_k g_{ij}(P)=0\quad (\Longleftrightarrow\ \Gamma_{ij}^k(P)=0),\quad \forall\, i,\, j,\, k.$$

可以证明，在 Riemann 流形的每一点都存在一个法坐标系.

3. **指标的升降.**

利用度量张量 g，可以改变一个张量 (场) 的型. 例如设 T 是 $(0,2)$ 型张量，在局部坐标系 (U,x^i) 下分量系数记为 T_{ij}，通过升指标，可获得一个 $(1,1)$ 型张量，分量系数为 $T_k^l=g^{jl}T_{jk}$. 再升指标，获得一个 $(2,0)$ 型张量：$T^{jk}=g^{jl}g^{km}T_{lm}$.

同样，我们可通过降指标改变张量的型：$T_{ij}=g_{ik}T_j^k$.

一个二阶张量 $T=\{T_{ij}\}$ 的模定义为 $|T|^2=T_{jk}T^{jk}=g^{jl}g^{km}T_{jk}T_{lm}$.

4. **协变导数的逗号记法.**

设 f 是 Riemann 流形 (M,g) 上的光滑函数，在局部坐标系 (U,x^i) 下，f 的协变导数就是其微分 df 的系数，$f_{,i}=f_i=\partial_i f$. f 的 k 阶协变导数 $\nabla^k f$ 是 k 阶协变张量，其分量系数记为 $f_{i_1i_2\cdots i_k}$.

一个二阶张量 $T=\{T_{ij}\}$ 的二阶协变导数 $\nabla^2 T$ 是一个四阶张量，其分量系数将记为 $T_{ij,kl}$.

第三节　曲　率

一、曲率张量

在仿射联络空间中，曲率张量是引入各种曲率的基矗是 Riemman 几何的基本概念.

设 (M,D) 是 n 维仿射联络空间，对于任意光滑切向量场 $X,\,Y\in\mathfrak{X}(M)$，定义映射 $\mathcal{R}(X,Y):\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ 如下：

$$\mathcal{R}(X,Y)Z=\mathrm{D}_X\mathrm{D}_Y Z-\mathrm{D}_Y\mathrm{D}_X Z-\mathrm{D}_{[X,Y]}Z,\quad \forall\, Z\in\mathfrak{X}(M),$$

并称 $\mathcal{R}(X,Y)$ 为仿射联络空间 (M,D) 关于光滑向量场 X, Y 的 **曲率算子**.

设 X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$，$f \in C^\infty(M)$. 曲率算子具有如下性质:

(a) $\mathcal{R}(X,Y) = -\mathcal{R}(Y,X)$;

(b) $\mathcal{R}(fX,Y) = f\mathcal{R}(X,Y)$;

(c) $\mathcal{R}(X,Y)(fZ) = f\mathcal{R}(X,Y)Z$;

(d) 若 D 是无挠联络，则

$$\mathcal{R}(X,Y)Z + \mathcal{R}(Y,Z)X + \mathcal{R}(Z,X)Y = 0. \qquad \textit{(Bianchi 恒等式)}$$

从 $\overset{3}{\times}\,\mathfrak{X}(M)$ 到 $\mathfrak{X}(M)$ 的三重线性映射 $\mathcal{R}(X,Y,Z) \triangleq \mathcal{R}(X,Y)Z$ 是 $C^\infty(M)$-线性的，是 M 上的 $(1,3)$ 型光滑张量常叫做 **曲率张量场**.

易见，$\mathcal{R}(X,Y)Z$ 在 P 点的值，只与 X, Y, Z 在 P 点的值有关. 在局部坐标系 (U,x^i) 下，

设
$$\mathcal{R}(\partial_i,\partial_j)\partial_k = R^l_{kij}\partial_l,$$

则
$$R^l_{kij} = \partial_i\Gamma^l_{jk} - \partial_j\Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik}, \tag{6.3}$$

因此，$(1,3)$ 型的曲率张量场 $\mathcal{R}$ 在局部可以表示为

$$\mathcal{R} = R^l_{kij}\,\mathrm{d}x^k \otimes (\partial_l) \otimes \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j,$$

如果 $X = X^i\,\partial_i$，$Y = Y^i\,\partial_i$，则曲率算子 $\mathcal{R}(X,Y)$ 有如下局部表示

$$\mathcal{R}(X,Y) = X^iY^jR^l_{kij}\,\mathrm{d}x^k \otimes \partial_l.$$

设 (M,g) 是 Riemman 流形，四阶协变张量场

$$R(X,Y,Z,T) = g(X,\mathcal{R}(Z,T)Y)$$

称为流形 (M,g) 的 ***Riemman* 曲率张量**. Riemman 曲率张量 R 具有下列性质

$$R(X,Y,Z,T) = R(Z,T,X,Y), \qquad \text{(对称性)}$$

$$R(X,Y,Z,T) = -R(Y,X,Z,T), \qquad \text{(反对称性)}$$

在局部坐标系 (U,x^i) 下，设 $R_{ijkl} \triangleq g(\partial_i, \mathcal{R}(\partial_k,\partial_l)\partial_j)$，则

$$R_{ijkl} = g_{lm}R^m_{kij}.$$

Riemman 曲率张量 R 的对称性及反对称性，在局部坐标系下表现为：

$$R_{ijkl} = R_{klij}, \qquad \text{(对称性)}$$

$$R_{ijkl} = -R_{jikl}. \qquad \text{(反对称性)}$$

此外，对于 Riemann 张量 R 还成立下列 第一、第二 *Bianchi* 恒等式

$$R_{ijkl} + R_{ljik} + R_{kjli} = 0, \qquad (\textit{Bianchi}\ \text{I})$$

$$R_{ijkl,m} + R_{ijlm,k} + R_{ijmk,l} = 0. \qquad (\textit{Bianchi}\ \text{II})$$

二、数量曲率

1. 截面曲率.

定义 6.1 设 $p \in (M,g)$，E 是 T_pM 的二维子空间，(p,E) 处的截面曲率定义为

$$K(E) = -R(X,Y,X,Y),$$

其中 $X,Y \in E$ 是互相垂直的单位切向量.

根据 Riemann 曲率的对称性及反对称性，上述定义与 X, Y 的选择无关.

当 (M,g) 是 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑曲面时，截面曲率恰好就是 Gauss 曲率.

2. 数量曲率.

将曲率张量 $\mathcal{R}$ 进行缩并，若不论符号，则只有一个非零张量，称作 *Ricci* 张量，记为 Ric，它的分量为 $R_{ij} = R^k_{ikj}$. 由 (6.3)，Ricci 张量可用 Christoffel 符号表示为

$$R_{ij} = \partial_k\Gamma^k_{ji} - \partial_j\Gamma^k_{ki} + \Gamma^k_{km}\Gamma^m_{ji} - \Gamma^k_{jm}\Gamma^m_{ki}. \tag{6.4}$$

Ricci 张量的缩并 R 叫做 数量曲率. 我们有 $R = R_{ij}g^{ij}$.

将第二 Bianchi 恒等式先关于指标 i, k 缩并，接着缩并指标 j, l，得到数量曲率所满足的 Bianchi 恒等式

$$R_{,m} - 2R^i_{m,i} = 0. \qquad \text{(Bianchi 恒等式)}$$

一个 *Einstain 流形* (M_n, g) 是一个 Riemann 流形，其 Ricci 张量与度量张量成比例，即

$$R_{ij}(p) = \lambda g_{ij},$$

其中 λ 是常数. 将上式缩并，我们有 $R(p) = n\lambda$. 这就是说，一个 Einstain 流形的数量曲率必为常数.

第四节　测地线

一、平移

设 $\gamma : [a, b] \to M$ 是仿射联络空间 (M, D) 上的一条可微曲线，我们称向量场 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 沿 γ 平行，如果 X 沿切向量场 $\gamma'(t)$ 的协变微商为零，即

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_{\gamma'(t)}X &= \frac{\mathrm{d}\gamma^i(t)}{\mathrm{d}t}\nabla_i X(t) \\ &= \frac{\mathrm{d}\gamma^i(t)}{\mathrm{d}t}\left[\partial_i X^j(t) + \Gamma^j_{ik}X^k(t)\right]\frac{\partial}{\partial x^j} = 0. \end{aligned}$$

故在局部坐标系下，X 沿 γ 平行当且仅当满足下列微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}X^j}{\mathrm{d}t} + \Gamma^j_{ik}X^k\frac{\mathrm{d}\gamma^i(t)}{\mathrm{d}t} = 0. \qquad \text{(PT)}$$

设有两点 $P, Q \in M$，$\gamma(t)$ 是联结 P, Q 的一条可微曲线. 给定 $X_0 \in T_PM$，根据 Cauchy 初值定理，微分方程组 (PT) 具有唯一适合初值 $X(a) = X_0$ 的解 $X(t)$. 由于 (PT) 是线性的，$X(t)$ 对所有 $a \le t \le b$ 有定义. 我们称向量 $X(b)$ 为向量 X_0 沿曲线 γ 的 *平移*.

二、测地线

仿射联络空间 (M, D) 上的一条 C^2 曲线 $\gamma : I \to M$ 称为是一条 *测地线*，如果它的切向量 $\gamma'(t)$ 沿 γ 平行，这等价于说 $D_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$. 在局部坐标系

下，γ 是一条测地线当且仅当

$$\frac{\mathrm{d}^2\gamma^j}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^j_{ik}\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\gamma^k}{\mathrm{d}t}=0. \tag{Ge}$$

根据 Cauchy 初值理论，给定 $p\in M$ 及 $X\in T_pM$, $X\neq 0$，存在起点为 p 的唯一测地线 γ，使得 γ 在 p 点的切向量为 X，且 γ 对初值 (p, X) C^1 连续相依，记为 $\gamma(t,p,X)$.

对于 Riemann 流形 (M,g)，由于联络与度量相容，测地线 $\gamma(t)$ 的切向量的长度 $|\gamma'(t)|_g$ 是一常数. 弧长 s 与参数 t 成正比，$s=|X|_g t$.

利用简单的变分原理可证明，Riemann 流形上联结任意两点的最短曲线必是测地线.

三、指数映射

在 Riemann 流形 (M,g) 上，设 $\gamma(t,p,X)$ 是以 (p,X) 为初值的测地线，根据初值定理，对充分小的 $\beta>0$，当 $|t|<\beta$，$|X|_g<\beta$ 时，$\gamma(t,p,X)$ 仍是测地线. 易见 $\gamma(\lambda t,p,X)=\gamma(t,p,\lambda X)$. 因而存在某个 $\varepsilon>0$，使得当 $|X|_g<\varepsilon$ 时，$\gamma(1,p,X)$ 仍是测地线. 对于 T_pM 上原点 0 的充分小邻域，定义指数映射 $\exp_p: V\to M$ 为

$$\exp_p(X)=\gamma(1,p,X),\quad X\in V\subset T_pM.$$

对于 T_pM 上原点 0 的充分小邻域 V，指数映射 $\exp_p: V\to \exp_p(V)\subset M$ 是微分同胚.

事实上，由于 $\exp_p(tX)=\gamma(t,p,X)$，$\exp_p(tX)$ 是以 (p,X) 为初值的测地线（径向测地线），于是对于任意 $X\in T_pM$，我们有

$$(\exp_p)_*(X)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\exp_p(tX)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\gamma(t,p,X)=X,$$

这说明 $(\exp_p)_*$ 是恒同映射. 应用反函数定理便得到结论.

四、测地法坐标系

设 p 是 Riemann 流形 (M,g) 上的一点，那么存在 p 的一个邻 U，使得 U 中每一点 q 都能够用完全包含在 U 内的测地线与 p 联结. 与坐标卡 $(U,(\exp_p)^{-1})$ 相应的局部坐标系叫做 p 点的一个 *测地法坐标系*.

设 $p \in M$，取 $\delta > 0$ 使得指数映射 $\exp_p$ 在 $B_p(\delta) = \{X \in T_pM : |X|_g < \delta\}$ 上有定义. 记

$$\mathscr{B}_p(\delta) = \exp_p(B_p(\delta)),$$

则 $\mathscr{B}_p(\delta)$ 恰由 M 中与 p 联结且弧长小于 δ 的测地线的端点构成. 我们称 $\mathscr{B}_p(\delta)$ 为以 p 为中心、以 δ 为半径的 测地球，边界 $\partial\mathscr{B}_p(\delta)$ 为 测地球面. 当 δ 充分小时，指数映射是从 $B_p(\delta)$ 到 $\mathscr{B}_p(\delta)$ 的光滑同胚；此时测地球面 $\partial\mathscr{B}_p(\delta)$ 与 S^{n-1} 同胚，而由 p 点发出的测地线 (径向测地线) 与测地球面正交.

取 δ 充分小，使得任意两点 $p_1, p_2 \in \overline{\mathscr{B}_p(\delta)}$，除端点外，都可用一条完全落在 $\mathscr{B}_p(\delta)$ 中的最短测地线联结. 此时称这样的测地球为 测地凸球域.

五、Jacobi 场

设 (M, g) 是 Riemann 流形，$\gamma : [a, b] \to M$ 是测地线，记 $T = \gamma'(t)$. 如果沿 γ 定义的切向量场 $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$ 满足下列 *Jacobi 方程*

$$D_T^2 X \triangleq D_T D_T X = \mathcal{R}(T, X)T, \qquad \text{(Jacobi)}$$

则称 X 是沿测地线 γ 的一个 *Jacobi 场*. 这里 $\mathcal{R}$ 是曲率算子.

在局部坐标系中，Jacobi 方程表现为一个二阶齐次线性常微分方程组，因而存在唯一 Jacobi 场 $X(t) = X(\gamma(t))$ 满足给定初始条件 $X(0) = X_0$, $D_T X(0) = X_0'$，其中 X_0, $X_0' \in T_{\gamma(0)}M$.

设 $\gamma : [a, b] \to M$ 是测地线，M 上的单参数光滑曲线族 $\{\phi(s, \cdot)\}_{s\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ 称为是 γ 的一个测地变分，如果 $\phi(0, \cdot) = \gamma$，且 $\gamma_s = \phi(s, \cdot) : [a, b] \to M$ 是测地线. 令 $\widehat{T}(s, t) = \phi_{*(s,t)}(\partial/\partial t)$，$\widehat{X}(s, t) = \phi_{*(s,t)}(\partial/\partial s)$，则 $\widehat{T}$ 是曲线 γ_s 的切向量，$\widehat{X}$ 是横截曲线 σ_t 的切向量，它在 γ 上的限制 $X(t) = \widehat{X}(0, t)$ 便称为是 γ 的一个 测地变分向量场.

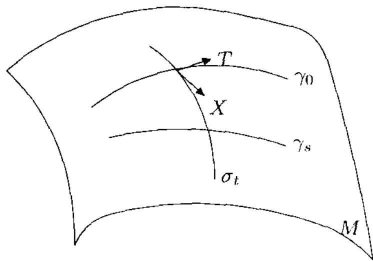


图 6.1: 变分向量场

一个关于测地变分向量场的结论是：若 X 是测地线 γ 的测地变分向量常则 X 必是沿 γ 的 Jacobi 场.

确实,(沿用以上符号)因为 γ 是测地线,满足测地线方程 $\mathrm{D}_T T = 0$. 又由于 $0 = \phi_*[\partial/\partial t, \partial/\partial s] = [T, X] = \mathrm{D}_T X - \mathrm{D}_X T$(D 是无挠联络),因而

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathrm{D}_X \mathrm{D}_T T = \mathrm{D}_T \mathrm{D}_X T - \big([\mathrm{D}_T, \mathrm{D}_X] - \mathrm{D}_{[X,T]}\big) T \\
&= \mathrm{D}_T \mathrm{D}_T X - \mathcal{R}(T, X) T.
\end{aligned}
$$

例 6.1 设 $\tau, \xi \in T_p M$, 在 $T_p M$ 中考虑射线族 $\rho_s(t) = t(\tau + s\xi)$. 则 M 上的曲线族 $\gamma_s = \exp_p \circ \rho_s$ 是由 p 点沿初始方向 $(\tau + s\xi)$ 发出的测地线, 且是测地线 γ_0 的一个变分, 因而变分向量场 $X(t) = (\partial/\partial s)\gamma_s(t)|_{s=0}$, 亦即 $X(t) = (\exp_p)_*|_{t\tau}(t\xi)$ 是 Jacobi 场.

第五节 流形上的微积分

一、流形上的微分算子

设 (M, g) 是一 $n \geq 2$ 维有向 Riemann 流形. 若 M 具有边界, 则假定它充分光滑.

1. 梯度算子 ∇.

Riemann 度量 g 在 M 上每一点 P 的切空间 $T_P M$ 上诱导一个内积, 用 $\langle\, ,\, \rangle_g$ 表示. 首先有如下

定义 6.2 设 $f \in C^k(M)$, $k \geq 1$. 函数 f 的梯度 ∇f 为 M 上的切向量场, 满足

$$\langle \nabla f, X \rangle_g = \mathrm{d} f(X) = X f, \quad \forall\, X \in TM.$$

显然, $\nabla : C^k :\to C^{k-1}$ 是线性的, 且具有通常导数的性质,

$$\nabla(fh) = h\nabla f + f\nabla h.$$

2. 散度算子 div.

设 D 是 (M, g) 的 Levi-Civita 联络, X 是 M 上的向量场, 则 DX 是 $(1,1)$ 型张量, 它的缩并 $C_1^1(DX)$, 或映射 $Y \mapsto D_Y X$ 的迹便定义为 X 的散度.

定义 6.3 设 X 是 M 上的充分光滑的向量场，X 的散度 $\operatorname{div} X$ 是一个实函数，

$$\operatorname{div} X = C_1^1(DX).$$

对于 $f \in C^1(M)$，$X \in C^1(TM)$，我们有

$$\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div}(X) + \langle \nabla f, X \rangle_g.$$

3. Beltrami-Laplace 算子 Δ.

定义 6.4 设 $f \in C^2(M)$, 我们定义

$$\Delta f \stackrel{\text{def}}{=\!=} \operatorname{div}(\nabla f),$$

称为 Beltrami-Laplace 算子, 亦称 Laplace 算子.

对于 M 上的函数 h, f，我们有

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(h\nabla f) &= h\Delta f + \langle \nabla h, \nabla f \rangle, \\
\Delta(hf) &= h\Delta f + 2\langle \nabla h, \nabla f \rangle + f\Delta h.
\end{aligned}$$

在点 P 的一个局部坐标卡 (x, U) 下, 设 $|g| = \det(g_{ij})$, $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, 则三个微分算子分别有如下局部表达

$$\nabla f = (g^{kl}\partial_l f)\partial_k;$$

$$\operatorname{div} X = (1/\sqrt{|g|})\partial_j(X^j\sqrt{|g|});$$

$$\Delta f = (1/\sqrt{|g|})\partial_j(g^{jk}\sqrt{g}\,\partial_k f).$$

这里，我们用到了求和约定.

在测地法极坐标系下，对于径向对称函数，Laplace 算子可简单地写为

$$\Delta f(r) = \Delta_0 f(r) + f'(r)\partial_r \log\sqrt{|g|}. \tag{6.5}$$

其中 Δ_0 是欧氏度量下的 Laplacian.

事实上，在测地法极坐标系 (r, ξ) 下，其中 $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$，度量 g 可表示为

$$g = \mathrm{d}r^2 + h_{ij}\,\mathrm{d}\xi^i\,\mathrm{d}\xi^j,$$

而 $\det(h_{ij}) = r^{n-1}|g|$. 由于 f 不依赖于 ξ^i，故

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{r^{n-1}\sqrt{|g|}}\partial_r\left[r^{n-1}\sqrt{|g|}\partial_r f\right] \\ &= f'' + \frac{n-1}{r}f' + f'\partial_r \log\sqrt{|g|} \\ &= \Delta_0 f(r) + f'(r)\partial_r \log\sqrt{|g|}.\end{aligned}$$

二、流形上的积分

1. 外微分式的积分. 我们知道，一个微分流形 M_n 是可定向的，如果存在 M_n 的一个坐标覆盖，使得坐标变换的 Jacobi 行列式保持同号. 这等价于 M_n 上存在一个处处不为零的 n 次外微分式. 处处不为零的外微分式间可引进等价关系：$\omega_1 \sim \omega_2$ 当且仅当存在光滑函数 $f > 0$ 使得 $\omega_1 = f\omega_2$. 对于可定向的微分流形，这样的等价类恰有两个，选择其中一个便给出一个定向.

设 ω 是定向微分流形 M_n 上的一个具紧支集的 n 次外微分式. 按如下方式定义 ω 在 M_n 上的积分：

设 $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ 是与定向一致的一个坐标覆盖，$\{\alpha_i\}_{i\in I}$ 是从属于 $\{U_i\}_{i\in I}$ 的一个单位分解，在 U_i 上 ω 可局部表示为

$$\omega = f_i(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n, \quad x \in U_i,$$

那么，ω 在 M_n 上的积分就定义为

$$\int_{M_n} \omega = \sum_{i\in I}\int_{\varphi_i(U_i)}\left[\alpha_i(x)f_i(x)\right]\circ\varphi_i^{-1}\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n.$$

可以验证，上述定义是可行的：积分既与坐标覆盖无关，也与从属于坐标覆盖的单位分解无关.

定理 6.1 如果 M_n 不可定向，那么 M 具有一个可定向的二重覆盖流形 (covering manifold with two sheets) $\widetilde{M}$.

我们说流形 $\widetilde{M}$ 是 M 的一个覆盖流形，如果存在可微映射 $\pi : \widetilde{M} \to M$，使得对于每一点 $P \in M$ 有

(α) $F \triangleq \pi^{-1}(P)$ 是离散空间；

(β) 存在点 P 的邻域 U，使得 $\pi^{-1}(U)$ 与 $U \times F$ 微分同胚，而每个点 $\widetilde{P} \in \pi^{-1}(P)$ 都有一个邻域 $\widetilde{U} \in \widetilde{M}$，使得 π 在 $\widetilde{U}$ 上的限制 $\pi_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \to \pi(\widetilde{U})$ 是可微同胚映射.

如果 F 恰好包含两点，那么 $(\widetilde{M},\pi)$ 就叫做 M 的一个二重覆盖.

2. **带边流形.**

令 E 及 $\overline{E}$ 分别表示 $\mathbb{R}^n$ 中的开半空间 $x_1<0$ 及闭半空间 $x_1\leq 0$，其拓扑为诱导拓扑. 一个函数称作在 $\bar{E}$ 属于 C^k 类，如果它是 $\mathbb{R}^n$ 上某个 C^k 函数在 $\bar{E}$ 上的限制.

我们说 M_n 是一个带边流形，如果 M_n 的每个点都有一个邻域与 $\bar{E}$ 同胚. 其中具有邻域与 $\mathbb{R}^n$ 同胚的点叫内点，其余点叫边界点. 边界点的集合记为 ∂M. 显然 ∂M 是无边的 $(n-1)$ 维流形.

比照 C^k 流形的定义，可给出带边 C^k 流形的概念.

设 M_n 是一带边定向流形，则 M_n 的定向诱导 ∂M 的一个定向. 设 $(U_j,\varphi_j)_{j\in I}$ 是 M_n 的一个与其定向一致的坐标覆盖，$(\overline{U}_j,\overline{\varphi}_j)_{j\in I}$ 是 ∂M 相应的坐标覆盖，记 $i:\partial M\to M$ 为典则包含映射，对于 $q\in\partial M$，将 ∂M 的切向量 $X\in T_q(\partial M)$ 视为 M 的切向量 $i_*(X)\in T_qM$. 取 $e_1\in T_qM$ 但 $e_1\notin T_q(\partial M)$，且 e_1 指向外侧，即

$$\big(f(q)=0,\ f\leq 0 \text{ 于 } M \text{ 中}\big)\Longrightarrow\big(e_1(f)\geq 0\big).$$

取 $T_q(\partial M)$ 的一个基 $e_2,\cdots,e_n$ 使得 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 构成 T_qM 的基且与 M 的正向一致. 这样的程序便规定了 ∂M 的一个典则的定向.

3. **Stokes 公式.**

设 M_n 是定向的 C^k 带边紧流形，ω 是 M_n 上的 $(n-1)$ 次外微分式，则

$$\int_M \mathrm{d}\omega=\int_{\partial M}\omega,$$

其中 ∂M 的定向是由 M 的定向诱导的典则定向，右边积分号中的 ω 是 $i_*(\omega)$ 的简化记法.

4. **Lebesgue 积分.**

设 (M_n,g) 是 n 维 Riemann 流形，(U,φ,x^i) 为一局部坐标系，我们称 $\mathrm{d}V\triangleq\sqrt{|g|}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\cdots\mathrm{d}x^n$ 为流形 M 的 Riemann 体积元素.

设 f 是 M 上的一连续函数，具紧支集 $\operatorname{sppt} f\subset U$，定义

$$\int_M f\mathrm{d}V=\int_{\varphi(U)}(\sqrt{|g|}f)\varphi^{-1}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\cdots\mathrm{d}x^n.$$

这样的定义是可行的. 事实上, 设 (V, ψ, y^j) 是另一局部坐标系, 且 $\operatorname{sppt} f \subset U \cap V$, 则在新旧坐标系间度量矩阵的行列式 $|g'|$ 与 $|g|$ 满足关系 $|g'| = |\det(\partial x^i/\partial y^j)|^2 |g|$, 两坐标系间欧氏体积元素满足 $\mathrm{d}y^1 \mathrm{d}y^2 \cdots \mathrm{d}y^n = |\det(\partial y^i/\partial x^j)| \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \cdots \mathrm{d}x^n$, 所以

$$\int_{\varphi(U\cap V)} (\sqrt{|g|} f)\, \varphi^{-1} \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \cdots \mathrm{d}x^n = \int_{\psi(U\cap V)} (\sqrt{|g'|} f)\, \psi^{-1} \mathrm{d}y^1 \mathrm{d}y^2 \cdots \mathrm{d}y^n.$$

对于一般具紧支集的连续函数 f, 任选 M 的一个坐标覆盖 $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$, 并设 $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ 是从属于 $\{U_i\}_{i\in I}$ 的一个单位分解, 我们定义

$$\int_M f \mathrm{d}V = \sum_{i\in I} \int_M \alpha_i f \mathrm{d}V.$$

易证上述定义不依赖于坐标覆盖及单位分解的选择. 因而 $(M, \mathrm{d}V)$ 是一 Radon 测度空间. 将抽象测度的理论应用到测度空间 $(M, \mathrm{d}V)$, 便得到一般的 Riemann 流形上 Lebesgue 积分的概念及理论.

5. **散度定理与 Green 公式.**

散度定理 I　设 (M, g) 是 n 维 (无边) Riemann 流形, X 是 M 上具紧支集的 C^1 向量常则有下列散度定理

$$\int_M (\operatorname{div} X) \mathrm{d}V = 0.$$

当 M 可定向时这是普通的散度定理, 当 M 不可定向时, 借助二重覆盖 $(\widetilde{M}, \pi)$ 可证结论.

Green 公式 I　设 (M, g) 是 n 维 (无边) Riemann 流形. 设 $h \in C^1$, $f \in C^2$ 为 M 上的函数, 假定 $h(\nabla f)$ 具紧支集, 则

$$\int_M h(-\Delta f) \mathrm{d}V = \int_M \langle \nabla f, \nabla h \rangle_g \mathrm{d}V;$$

设 $h \in C^2$, $f \in C^2$ 为 M 上的函数, 假定 h, f 具紧支集, 则

$$\int_M h \Delta f \mathrm{d}V = \int_M f \Delta h \mathrm{d}V.$$

现假设 M 具有边界 ∂M，具有由 g 诱导的度量 g' 及面积元素 $\mathrm{d}A$. 用 ν 表示边界上的单位外法切向量常

散度定理 II 设 C^1 向量场 X 具有紧支集 $\operatorname{sppt} X \in \overline{M}$，那么

$$\int_M (\operatorname{div} X)\,\mathrm{d}V = \int_{\partial M} \langle X, \nu\rangle_{g'}\,\mathrm{d}A.$$

Green 公式II 设 $h \in C^1$，$f \in C^2$ 为 M 上的函数，假定 $h(\nabla f)$ 具有紧支集含于 $\overline{M}$ 中，则

$$\int_M \left[h\Delta f + \langle \nabla f, \nabla h\rangle \right] \mathrm{d}V = \int_{\partial M} h\,(\nu f)\,\mathrm{d}A;$$

设 $h \in C^2$，$f \in C^2$ 为 M 上的函数，假定 h, f 都具紧支集，则

$$\int_M \left[h\Delta f - f\Delta h \right] \mathrm{d}V = \int_{\partial M} \left[h(\nu f) - f(\nu h) \right] \mathrm{d}A.$$

三、共形变换

1. **共形度量**. 设映射 ϕ 是从 Riemann 流形 (M,g) 到 (N,h) 的微分同胚，如果存在 M 上的光滑恒正的函数 ρ，使得 $\phi^*h = \rho g$，其中 ϕ^* 是 ϕ 的拉回映射，则称 (M,g) 与 (N,h) 是共形等价的，ϕ 称为共形变换. 特别，如果 $\rho \equiv 1$，则称 ϕ 是 等距变换或 等距映射.

流形 M 上的两个 Riemann 度量 g 与 $\tilde{g}$ 称为共形等价的，记为 $\tilde{g} \sim g$，如果恒等映射是 (M,g) 到 $(M,\tilde{g})$ 的共形变换，即存在 M 上严格正的函数 ρ，使得 $\tilde{g} = \rho g$. 这时也说 $\tilde{g}$ 是 g 的一个共形变换或保角形变.

显然，共形等价 "$\sim$" 是等价关系，度量 g 的等价类记为 $[g]$.

在共形变换下，两切向量的夹角不变.

取 g 的共形度量 $\tilde{g} = e^{2f} g$，用 $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$、$\widetilde{R}_{ij}$ 及 $\widetilde{R}$ 分别表示度量 $\tilde{g}$ 下的 Cristoffel 记号、Ricci 曲率及数量曲率. 由 (6.2) 得

$$\Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ij}^l + \left[g_{kj} f_i + g_{ki} f_j - g_{ij} f_k \right] g^{kl},$$

由此，根据 (6.4)，我们有

$$\tilde{R}_{ij} = R_{ij} - (n-2) f_{ij} + (n-2) f_i f_j - \left[\Delta f + (n-2)|\nabla f|^2 \right] g_{ij}. \qquad (6.6)$$

将上式进行缩并，记得 $\tilde{R}=\tilde{g}^{ij}\tilde{R}_{ij}=e^{-2f}g^{ij}\tilde{R}_{ij}$，便得

$$\tilde{R}=e^{-2f}\big[R-2(n-1)\Delta f-(n-1)(n-2)|\nabla f|^2\big]. \tag{6.7}$$

如果 $n=2$，上式不含梯度项，(6.7) 变为

$$\tilde{R}=e^{-2f}\big[R-2(n-1)\Delta f\big]. \tag{6.8}$$

如果 $n\geq 3$，为消掉 (6.7) 中的梯度项，令 $e^{2f}=\varphi^{4/(n-2)}$，仍记 $N=\frac{2n}{n-2}$，则 (6.7) 式化简为

$$\widetilde{R}=\Big(R\varphi-4\frac{n-1}{n-2}\Delta\varphi\Big)\varphi^{1-N}. \tag{6.9}$$

2. Weyl 张量.

设 (M,g) 是 n 维 Riemann 流形. 在局部坐标系 (U,x^i) 下，我们定义

$$\begin{aligned}W_{ijkl}=R_{ijkl}&-\frac{1}{n-2}\big(R_{ik}g_{jl}-R_{ij}g_{jk}+R_{jl}g_{ik}-R_{jk}g_{il}\big)\\&+\frac{R}{(n-1)(n-2)}\big(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk}\big).\end{aligned}$$

容易验证，W_{ijkl} 是某个 $(0,4)$ 型张量 W 的系数，叫做 Weyl 张量. W^{j}_{ikl} 在共形变换下不变 (见陈维桓 [220] 第四章习题)，称为 Weyl 共形曲率张量.

关于 Weyl 张量，我们有 (见陈维桓 [220] 第四章习题):

(α) Weyl 张量 W_{ijkl} 关于任意两个指标的迹都为零.

(β) 当 $n\geq 4$ 时，Weyl 张量恒等于零当且仅当 (M,g) 局部共形平坦. 当 $n=3$ 时，Weyl 张量恒等于零，(M,g) 局部共形平坦的充分必要条件是 Bek 张量恒等于零.

我们所说 (M,g) 局部共形平坦，指的是，对于每一点 $P\in M$，都有一个邻域 U 及共形度量 $\tilde{g}$，使得在 U 上，$\tilde{g}$ 的曲率张量恒等于零，这也等价于说，存在共形度量 $\tilde{g}$，使得在 P 点适当的法坐标系下，$\tilde{g}_{ij}=\delta_{ij}$.

局部共形平坦的典型例子是标准球面 $(\mathbb{S}^n,g_0)$，更多例子见 Schoen-Yau [182] 或 [237].

3. 共形 Laplace 算子.

设 (M,g) 是 Riemann 流形，我们称算子

$$\Box=-\Delta+\kappa_g$$

为 (M,g) 的共形 Laplace 算子，其中 $\kappa_g = \frac{n-2}{4(n-1)}R_g$，而 R_g 是 (M,g) 的数量曲率. 显然，$\Box$ 是自共轭算子.

根据数量曲率 R 与 $\widetilde{R}$ 间的变换式 (6.9)，算子 $\Box$ 按以下意义是共形不变的：作度量的共形变换 $\tilde{g} = \varphi^{4/(n-2)}g$，则 $\tilde{g}$ 的共形 Laplace 算子 $\widetilde{\Box}$ 满足

$$\Box(\varphi u) = \varphi^{N-1}\widetilde{\Box}u, \quad \left(N = \frac{2n}{n-2}\right).$$

显然，在共形变换下，共形 Laplace 算子的强制性不变.

第六节　流形上的 Sobolev空间

一、Sobolev 嵌入定理

1. 空间 $W_0^{m,p}(M)$.　设 $(M,\ g)$ 是 $n \geq 2$ 维紧致光滑 Riemann 流形 (无边或有足够光滑的边界). 设 u 是 M 上的一光滑函数，m 是一正整数，记 $\nabla^m u$ 为 u 的 m 阶协变导数，$|\nabla^m u|$ 为其模，则

$$|\nabla^m u|^2 = \nabla^{\alpha_1}\cdots\nabla^{\alpha_m}u\cdot\nabla_{\alpha_1}\cdots\nabla_{\alpha_m}u,$$

这里采用了求和约定，其中 $\nabla^{\alpha_1}\cdots\nabla^{\alpha_m}u = g^{\alpha_1\beta_1}\cdots g^{\alpha_m\beta_m}\nabla_{\beta_1}\cdots\nabla_{\beta_m}u$. 特别地，$|\nabla^0 u|^2 = |u|^2$，$|\nabla u|^2 = \nabla^\nu u\nabla_\nu u$.

空间 $W_0^{m,p}(M)$ 是 $C_0^\infty(M)$ 在范数

$$\|u\|_{m,p} = \sum_{k=0}^{m}\left(\int_M |\nabla^k u|^p \mathrm{d}V\right)^{1/p}$$

下的完备化，其中 $\mathrm{d}V$ 是 (M,g) 的体积元素.

$W_0^{k,2}(M)$ 是 Hilbert 空间，通常记为 $H_0^k(M)$，也有几何学家写成 $\mathring{H}^k(M)$. 当 M 是紧致无边流形时，$W_0^{k,2}(M)$ 或 $H_0^k(M)$ 与 $H^k(M)$ 一致.

2. 嵌入定理.

T. Aubin 系统地建立了流形上的 Sobolev 空间理论，我们有下列 (见 Aubin [5, 7])

定理 6.2　设 (M, g) 是一 $n \geq 2$ 维紧致光滑 Riemann 流形 (无边或边界充分光滑), 则有如下连续嵌入:

$$W_0^{m,p}(M) \hookrightarrow \begin{cases} L^q(M) \ \forall\, q \in \left[p, \frac{np}{n-mp}\right] & 若\ mp < n, \\ L^q(M) \ \forall\, q \in [p, \infty) & 若\ mp = n, \\ C(\overline{M}) & 若\ mp > n. \end{cases}$$

此外, 若 $1 \leq p < n$, 则 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, A = A(p, \varepsilon)$, 使得

$$\|u\|_{np/(n-p)} \leq (K(n,p) + \varepsilon)\|\nabla u\|_p + A\|u\|_p, \quad u \in W_0^{1,p}(M).$$

这里, $K(n,p)$ 是使得上式成立的最小正数, 称为最佳 Sobolev 嵌入常数.

注意术语最佳 Sobolev 常数（用 S 表示，见 53 页定理 2.6）与最佳 Sobolev 嵌入常数（用 $K(n,p)$ 表示）不同，例如 $K^{-2}(n,2) = S = 4^{-1}n(n-2)\omega_n^{2/n}$.

当 $m = 1$, $p = 2$ 时，Hebey-Vaugon [114] 将上述不等式改进为

定理 6.3　设 (M, g) 是一 $n \geq 3$ 维紧致光滑 Riemann 流形 (无边或有足够光滑的边界), 则对于任意 $u \in \mathring{H}^1(M)$, 成立

$$\|u\|_{2n/(n-2)}^2 \leq K^2(n,2)\|\nabla u\|_2^2 + A\|u\|_2^2. \tag{6.10}$$

这里 A 是与 u 无关的常数. 特别, 对于标准单位球面, $A = \omega_n^{-2/n}$.

下面给出流形上的 Kondrachov 定理，其证明见 Aubin [5, 7].

定理 6.4 (Kondrachov)　设 (M, g) 是一 $n \geq 2$ 维紧致光滑 Riemann 流形 (无边或边界充分光滑), 则有下列紧嵌入

$$W_0^{m,p}(M) \hookrightarrow \begin{cases} L^q(M) & 若\ mp < n,\ q < \frac{np}{n-mp} \\ C^\lambda(\overline{M}) & 若\ 0 \leq \lambda < m - \frac{n}{p}. \end{cases}$$

其中 $C^\lambda = C^{k,\alpha}$, $k = [\lambda]$ 是 λ 的整数部分, $\alpha = \{\lambda\}$ 是其分数部分.

3. Poincaré不等式.

设 (M,g) 是 $n \geq 2$ 维紧致流形，那么 $L^2 \hookrightarrow H^1$ 紧致，应用 Lagrange 乘数法，容易得到下列 Poincaré不等式:

$$\|u - \bar{u}\|_2^2 \leq \lambda_1 \|\nabla u\|_2^2, \quad \forall\, u \in H^1(M), \tag{6.11}$$

其中 $\bar{u}$ 为 u 的平均值，即 $\bar{u} = \frac{1}{V}\int_M u \mathrm{d}V$，$\lambda_1$ 是 $-\Delta$ 的第一非零特征值.

4. **最佳 Sobolev 嵌入常数的改进.**

对称性可以改进 Sobolev 嵌入，在这方面，Hebey-Vaugon [115] 有系统的论述，也参见本书引述的定理 8.19.

Aubin [4] 指出，标准单位球面 $(\mathbb{S}^n, g_0)$ 上的 H^1 函数，如果满足某些自然的直交性条件，则不等式 (6.10) 中的嵌入常数可以改进，这也可看做是 Sobolev 嵌入的改进.

我们知道，$(\mathbb{S}^n, g_0)$ 上 Laplace 算子 $-\Delta$ 的第一非零特征值 $\lambda_1 = n$，其特征空间 $\mathcal{F}$ 是 $n+1$ 维线性空间. 事实上，若 $x = (x_1, \cdots, x_{n+1})$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的标准坐标，那么限制函数 $x_i|_{\mathbb{S}^n}$ $(1 \le i \le n)$ 按 L^2 互相直交，并构成 $\mathcal{F}$ 的基底.

定理 6.5 (Aubin [4]) 设 $n \ge 3$, 函数 $u \in H^1(\mathbb{S}^n)$ 满足直交性条件: $\int \varphi |u|^N \mathrm{d}V = 0$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{F}$, 其中 $\mathcal{F}$ 是 $-\Delta$ 的第一特征空间. 则

$$\|u\|_N^2 \le \left[2^{-2/n} K^2(n,2) + \varepsilon\right] \|\nabla u\|_2^2 + A(\varepsilon) \|u\|_2^2, \tag{6.12}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 充分小, $A(\varepsilon)$ 是与 ε 有关的常数.

二、Trudinger 不等式

当 $mp = n$ 时，Sobolev 空间 $W^{m,p}$ 可嵌入到所有 L^p $(1 \le p < \infty)$ 空间，但不嵌入到 L^∞，这中间存在的空挡，可由 Trudinger 不等式填补.

1. **$\mathbb{R}^n$ 中有界区域的情形.**

定理 6.6 (Moser-Trudinger 不等式) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域, 记 $\alpha_n = n\omega_{n-1}^{1/(n-1)}$, 那么对于所有 $\alpha \le \alpha_n$, 成立不等式

$$\int_\Omega \exp\left(\alpha |u|^{n/(n-1)}\right) \mathrm{d}x \le C|\Omega|, \quad \forall\, u \in \mathbb{B}_1, \tag{6.13}$$

其中 $\mathbb{B}_1 = \left\{u \in W_0^{1,n} : \|\nabla u\|_n \le 1\right\}$, C 是只依赖于 n 的常数.

这类不等式最早由 Trudinger [201] 证明 (参见 Gilbarg-Trudinger [106]). 指出最佳常数为 α_n 是 Moser [151] 的工作. 如果 $\alpha > \alpha_n$, (6.13) 左端依然有限，但可选择 $u \in \mathbb{B}_1$ 使其任意大.

证明 利用对称化，根据 Cavalieri 原理 (见第 31 页定理 1.32) 及 Pólya-Szegö 不等式 (见第 34 页定理 1.36)，只须就 $\Omega = B_\rho$ 为球域，u 为径向对称函

数建立 (6.13). 而据稠密性及 Fatou 引理，又可设 $u \in C_0^1(\Omega)$. 如此，我们有

$$|u(x)| \le \int_r^\rho |u_r| \mathrm{d}r, \quad (r = |x|)$$

将被积函数写为 $|u_r| r^{\frac{n-1}{n}} \cdot r^{\frac{1-n}{n}}$，由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned} |u(x)| &\le \left(\int_0^\rho |u_r|^n r^{n-1} \mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_r^\rho r^{-1} \mathrm{d}r\right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &= \omega_{n-1}^{-1/n} \|\nabla u\|_n \big[\log(\rho/r)\big]^{\frac{n-1}{n}}, \end{aligned}$$

注意到 $\|\nabla u\|_n \le 1$，及 $\alpha \omega_{n-1}^{1/(1-n)} = n\alpha\alpha_n^{-1}$，由上式得

$$\int_{B_\rho} \exp\left(\alpha |u|^{n/(n-1)}\right) \mathrm{d}x \le \int_{B_\rho} [\rho/r]^{n\alpha\alpha_n^{-1}} \mathrm{d}x,$$

如果 $\alpha < \alpha_n$，我们有

$$\int_{B_\rho} \exp\left(\alpha |u|^{n/(n-1)}\right) \mathrm{d}x \le \frac{\omega_{n-1}\rho^n}{n(1 - \alpha\alpha_n^{-1})},$$

从而得到 (6.13). $\alpha = \alpha_n$ 的情形比较难证，可参见 Moser [151]. □

推论 6.7 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域，令 $\beta_n = (n-1)^{n-1} n^{1-2n} \omega_{n-1}^{-1}$，那么对于所有 $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$，成立不等式

$$\int_\Omega e^u \mathrm{d}x \le C|\Omega| \exp\left(\beta_n \|\nabla u\|_n^n\right), \tag{6.14}$$

其中 C 是只依赖于 n 的常数.

证明 对于任意实数 a, b，我们有不等式

$$ab \le \alpha_n |a|^{n/(n-1)} + \beta_n |b|^n,$$

令 $a = u\|u\|_n^{-1}$，$b = \|\nabla u\|_n$，那么 $ab = u$，应用 (6.13) 便得到 (6.14). □

关于高阶 Moser-Trudinger 不等式，见 D.R. Adams [14] 及所列参考文献.

2. 紧致流形的情形.

现将定理 6.6 及推论 6.7 推广到紧致 Riemann 流形上.

推论 6.8 设 (M,g) 是 $n\geq 2$ 维紧致 Riemann 流形，则对于所有 $u\in W^{1,n}(M)$ 成立不等式

$$\int_M \exp\left[\alpha\big(|u|\cdot\|u\|_{W^{1,n}}^{-1}\big)^{n/(n-1)}\right]\mathrm{d}V\leq C, \tag{6.15}$$

其中 $\alpha, C>0$ 是不依赖于 u 的常数.

证明 只给一个简单勾勒. 设 $\{(U_i,\varphi_i):1\leq i\leq k\}$ 是 M 的一个有限坐标覆盖，使得 φ_i 是 U_i 到单位球 $B\subset\mathbb{R}^n$ 的微分同胚. 设 μ_i 是从属于 U_i 的单位分解，令 $u_i=\mu_i u$，则 $\|\nabla_0 u_i\|_{n,B}\leq c\|u\|_{W^{1,n}}$. 此外，对于非负函数 f，

$$\int_M \exp\big(\mu_i f\big)\,\mathrm{d}V\leq C\int_{U_i}\exp\big(\mu_i f\big)\,\mathrm{d}V.$$

在 U_i 上，$\mathrm{d}V\leq C\,\mathrm{d}x$，利用指数函数的凸性，

$$(6.15)\text{ 左端}\leq\frac{C}{k}\sum_{i=1}^{k}\int_B\exp\left[k\alpha\big(|u_i|\cdot\|u\|_{W^{1,n}}^{-1}\big)^{n/(n-1)}\right]\mathrm{d}x \tag{6.16}$$

令 $v_i=c^{-1}|u_i|\cdot\|u\|_{W^{1,n}}^{-1}$，取 $\alpha>0$ 充分小，使得 $\alpha kc^{n/(1-n)}<\alpha_n$，对每个 v_i 在 B 上应 Moser-Trudinger 不等式，由 (6.16) 便推出所需结论. □

定理 6.9 设 (M,g) 是 $n\geq 2$ 维紧致 Riemann 流形，则

$$\int_M e^u\mathrm{d}V\leq C\exp\big[\beta\|\nabla u\|_n^n+c\|u\|_n^n\big],\quad \forall\, u\in W^{1,n}(M), \tag{6.17}$$

其中 C, β, c 是常数. 此外，映射 $W^{1,n}(M)\ni u\mapsto e^u\in L^q(M)$ $(q\geq 1)$ 为紧.

证明 不等式 (6.17) 可仿照推论 6.7 的证明获得. 为证定理的第二部分，我们应用 Kondrachov 定理：嵌入 $W^{1,1}\hookrightarrow L^1$ 紧.

设 $\mathcal{A}$ 是 $W^{1,n}(M)$ 中的有界集，将不等式 (6.17) 中的 u 换作 qu，那么对于任意 $q\geq 1$，$\{e^u: u\in\mathcal{A}\}$ 在 $L^q(M)$ 中有界. $\|\nabla e^u\|_1\leq\|\nabla u\|_n\|e^u\|_{n/(n-1)}$ 表明，$\{e^u: u\in\mathcal{A}\}$ 在 $W^{1,1}$ 中有界，因而是 L^1 中的相对紧集. 将 u 换作 qu，其中 $q\geq 1$ 是实数，知映射 $W^{1,n}(M)\ni u\mapsto e^u\in L^q(M)$ 为紧. □

对于标准球面 $(\mathbb{S}^n,g_0)$，成立最佳 Moser-Aubin 不等式. 下列定理，当 $n=2$ 时为 Moser [151] 所证，一般情形由 Aubin [4] 给出.

定理 6.10 (Moser-Aubin 不等式)　对于所有满足规范条件 $\int u\mathrm{d}V=0$ 的函数 $u\in W^{1,n}(\mathbb{S}^n)$ 成立

$$\int_{\mathbb{S}^n} e^u \mathrm{d}Vg_0 \leq C\exp\left(\beta_n\|\nabla u\|_n^n\right), \tag{6.18}$$

其中 C 是只依赖于 n 的常数，g_0 是 $\mathbb{S}^n$ 的标准度量.

3. **最佳常数的改进**.

Aubin [4] 指出，如果定理 6.10 中的函数进一步满足某些自然的直交性条件，那么最佳常数 β_n 可以改进.

定理 6.11 (Aubin [4])　设函数 $u\in W^{1,n}(\mathbb{S}^n)$ 满足: (1) 规范性条件，$\int u\mathrm{d}V=0$; (2) 直交性条件，$\int \varphi e^u\mathrm{d}V=0$, $\forall\ \varphi\in\mathcal{F}$，其中 $\mathcal{F}$ 是 Laplace 算子 $-\Delta_{g_0}$ 的第一特征值 $\lambda_1=n$ 所对应的特征函数构成的函数空间. 则

$$\int_{\mathbb{S}^n} e^u \mathrm{d}Vg_0 \leq C(\beta)\exp\left((\beta/2)\|\nabla u\|_n^n\right), \tag{6.19}$$

其中 $\beta>\beta_n$ 并且可充分接近 β_n，$C(\beta)$ 是只依赖于 n 与 β 的常数.

注记 6.1　在定理 6.11 中，如果 u 进一步满足 $\|u\|_2\leq k$，则不等式 (6.19) 中的 β 可取最佳常数 $\frac{1}{2}\beta_n$，常数 $C(\beta)$ 则换为只依赖于 k 的常数 $C(k)$.

我们指出，对于函数 $H^1(\mathbb{S}^2)$，若满足规范性条件及对称性条件，$u(-x)=u(x)$, $\forall x\in\mathbb{S}^2$，则成立不等式 (6.19). Osgood 等 [163] 指出，此时可取 $\frac{1}{2}\beta=\frac{1}{2}\beta_2=1/32\pi$.

确实，$x\in\mathbb{S}^2\subset\mathbb{R}^3$ 的三个分量 x_1, x_2, x_3 是第一特征空间的基底，所以直交性条件等价于 $\int xe^u\mathrm{d}V(x)=0$. 故若 u 满足对称性条件，则

$$\int_{\mathbb{S}^2} xe^{u(x)}\mathrm{d}V=\int_{\mathbb{S}^2}(-x)e^{u(-x)}\mathrm{d}V=0.$$

推论 6.12　在标准的实射影平面 $(\mathbb{R}P^2,g_0)$ 上，成立最佳 Moser-Aubin 不等式.

证明　$\mathbb{R}P^2$ 的二重覆盖 $\mathbf{p}:\mathbb{S}^2\to\mathbb{R}P^2$ 有两叶，它将 $\mathbb{S}^2$ 的对径点映成 $\mathbb{R}P^2$ 的同一点. 对应于每个 $\varphi\in H^1(\mathbb{R}P^2)$，定义 $\mathbb{S}^2$ 上的函数 u，使得

$u(x)=\varphi(\mathbf{p}(x)),\ \forall\, x\in\mathbb{S}^2$，则对于任意满足规范条件的函数 $\varphi\in H^1(\mathbb{R}P^2)$，我们有 $u(-x)=u(x)$，且同样满足规范性条件，故

$$2\int_{\mathbb{R}P^2} e^{\varphi}\,\mathrm{d}V=\int_{\mathbb{S}^2} e^{u}\,\mathrm{d}V\le C\exp\big((\beta_2/2)\|\nabla u\|_2^2\big)=C\exp\big(\beta_2\|\nabla\varphi\|_2^2\big).$$

三、加权函数空间

在相对论的研究中，人们使用一类特殊的加权函数空间. 这类空间的引入及其在 $\mathbb{R}^n$ 上椭圆算子的应用可追溯到 Nirenberg-Walker [159]，经过 Lockhart [142]，McOwen [146]，Cantor [63]，Bartnik [35] 等的工作，得到极大的发展.

1. **空间** L^p_β.

设 $p\ge 1$，$\beta\in\mathbb{R}$，我们用 $L^p_\beta(\mathbb{R}^n)\,(n\ge 3)$ 表示具有有限模

$$\|u\|_{0,p,\beta}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^p}{|x|^{\beta p}}\frac{\mathrm{d}x}{|x|^n}\right)^{1/p}$$

的局部可积函数构成的线性空间.

2. **加权** Sobolev **空间** $W^{k,p}_\beta$.

$u\in W^{k,p}_\beta(\Omega)$ 当且仅当下列范数有限:

$$\|u\|_{k,p,\beta}=\sum_{m=0}^{k}\|D^m u\|_{0,p,\beta}.$$

3. **加权** Hölder **空间**.

定义加权连续可微函数空间 $C^k_\beta(\Omega)$ 为 W 上 C^k 函数在下列范数下的闭包:

$$\|u\|_{C^k_\beta}=\sum_{m=0}^{k}\sup_{\Omega}|x|^{m-\beta}|D^m u|.$$

定义加权 Hölder 空间 $C^{k,\alpha}_\beta(\Omega)$ 为 Ω 上 Hölder 空间 $C^{k,\alpha}$ 中函数在下列范数下的闭包:

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}_\beta}\doteq\|u\|_{C^k_\beta}+\sup_{x,y}\big(\min\{|x|,|y|\}\big)^{k+\alpha-\beta}H_\alpha(D^k u(x,y)),$$

其中 $H_\alpha(D^k u(x,y)) = \left|D^k u(x) - D^k u(y)\right| / |x-y|^\alpha$.

$\mathbb{R}^n$ 上诸加权空间的定义稍作修改就可适用于渐近平坦流形 (N,g) 的情形. 其中导数 $D^m u$ 要用 m 阶协变导数 $\nabla^m u$ 替代，表达式 $\nabla^m u(x) - \nabla^m u(y)$ 中 $\nabla^m u(y)$ 表示 x 点的张量，由 y 点处的张量 $\nabla^m u(y)$ 经由联结 x, y 的测地线平移而得.

4. **加权空间的 Sobolev 嵌入.**

定理 6.13 设 p, α, β 是实数，$p > 1$，$0 < \alpha < 1$，β 任意. $k, m \geq 0$ 是整数，并且满足 $m - k - \alpha > n/p$. 那么对于任意 $\varepsilon > 0$ 我们有连续嵌入

$$C^{m,\alpha}_{\beta-\varepsilon} \hookrightarrow W^{m,p}_\beta \hookrightarrow C^{k,\alpha}_\beta.$$

特别地，如果 $f \in W^{m,p}_\beta$ 且有 $mp > n$，那么 $f = O(|x|^\beta)$.

证明 第一个嵌入是加权空间定义的简单推论. 第二个嵌入的证明可见 Cantor [63] 或 Bartnik [35]. □

5. **加权空间上的椭圆算子.**

加权函数空间的魅力在于它为我们提供了研究非紧空间 $\mathbb{R}^n$ 上椭圆算子的一个工具，使得对于紧致空间上成立的 L^p 理论及 Schauder 理论，都可以在加权空间的框架内平行地搬到无界的 $\mathbb{R}^n$ 上来.

定理 6.14 $\mathbb{R}^n$ 上的 Laplace 算子 Δ 在加权空间上有如下性质

(α) 对于任意 $u \in W^{2,p}_\beta(\mathbb{R}^n)$，$p > 1$，成立加权 L^p 估计

$$\|u\|_{2,p,\beta} \leq C\big(\|\Delta u\|_{0,p,\beta} + \|u\|_{0,p,\beta}\big).$$

(β) 线性算子 $\Delta : W^{2,p}_\beta(\mathbb{R}^n) \to L^p_\beta(\mathbb{R}^n)$ 是同构当且仅当 $2 - n < \beta < 0$. 此外，如果 β 不是整数，那么对于一切 $\beta > 2 - n$，算子 Δ 是满射 (surjective); 对于而一切 $\beta < 0$，算子 Δ 是单射 (injective).

(γ) 如果 $u \in C^0_\beta(\mathbb{R}^n)$ 且 $\Delta u \in C^{0,\alpha}_{\beta-2}(\mathbb{R}^n)$，那么 $u \in C^{2,\alpha}_\beta(\mathbb{R}^n)$，并且成立加权 Schauder 估计

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}_\beta} \leq C\big(\|\Delta u\|_{C^{0,\alpha}_{\beta-2}} + \|u\|_{C^0_\beta}\big).$$

(δ) 设 $2-n<\beta<0$，$\delta<-2$，函数 $h\in C_{\delta}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$，如果算子 $(-\Delta+h)$: $C_{\beta}^{2,\alpha}\to C_{\beta-2}^{0,\alpha}$ 是单射，那么 $(-\Delta+h)$ 就是同构.

证明 结论 (α) 及 (β) 的证明见 Bartnik [35]，结论 (γ) 及 (δ) 的证明见 Chaljub-Choquet [65] 或 Lee-Parker [129] 的说明. □

注记 6.2 定理 6.14 的所有结论对于渐近平坦流形 (N,g) 及其上 Laplace 算子都成立，只须度量 g 满足 $g_{ij}-\delta_{ij}\in C_{-\tau}^{1,\alpha}(N)$，其中 $\tau>0$，$0<\alpha<1$.

第七章 YAMABE 问题

设 (M,g) 是 $n\geq 2$ 维紧致 Riemann 流形. 几何学家曾关心的一个问题是: 给定 M 上一个光滑函数 $\widetilde{R}$, 问是否存在与 g 共形等价的度量 $\tilde{g}$, 使得 $(M,\tilde{g})$ 的数量曲率恰好等于 $\widetilde{R}$.

记 R 为 g 的数量曲率，根据 (6.7)，当 $n=2$ 时，这一问题等价于求解方程

$$-\Delta u+R=\widetilde{R}e^{u} \quad 在\ M\ 上, \tag{7.1}$$

其中 $\widetilde{R}$ 是度量 $\tilde{g}=e^{u}g$ 的数量曲率. 当 $n\geq 3$ 时，根据 (6.9)，问题等价于求解 Yamabe 方程:

$$-\Delta u+\frac{n-2}{4(n-1)}Ru=\frac{n-2}{4(n-1)}\widetilde{R}u^{N-1},\quad u>0 \quad 在\ M\ 上, \tag{7.2}$$

其中 $\tilde{R}$ 是度量 $\tilde{g}=u^{\frac{4}{n-2}}g$ 的数量曲率，$N=2n/(n-2)$.

问题 (7.1) 及 (7.2) 称为设定数量曲率 (prescribed scalar curvature) 问题. 几何上最有意思的情形是 (7.1) 及 (7.2) 中 $\widetilde{R}$ 为常数的情形.

当 $n=2$, $\widetilde{R}=$ Const. 时，由复变函数论的单值化定理 (uniformation theorem)，问题 (7.1) 总是可解的 (见 Schoen-Yau [237])，通过变分法证明之，则称为 Berger 问题. Berger 问题也是可解的 (见 Aubin [5]).

当 $n\geq 3$, $\widetilde{R}=$ Const. 时，问题 (7.2) 称作 Yamabe 问题. Yamabe 问题的解决，经历了漫长的过程. 问题自 Yamabe [212, 1960] 产生，历经 Trüdinger [202, 1968]，Aubin [3, 1976] 及 Schoen [176, 1984] 等的工作，历时凡 20 余年才得到完全解决. Yamabe 问题的成功解决，是分析手段解决几何问题 (丘成桐称作 geometric anlysis，即几何分析法) 的一个典范.

Yamabe 问题是 1960 年 Yamabe [212] 为解决三维 Poincaré 猜想提出来的. Poincaré 猜想说的是[①]:

① Poincaré 猜想已由 G. Perelman 解决，见 S.T. Yau [213]

任何单连通的三维紧致流形都同胚于单位球面 $\mathbb{S}^3$.

如果在任何单连通的三维紧致流形上都可以构造出 Einstein 度量，那么就可推出这样的流形微分同胚于三维球面，从而证明 Poincaré 猜想. 注意，对于 Einstein 度量来说，它的数量曲率是常数.

Yamabe 的设想大致如下：令 $\mathscr{M}$ 表示 M 上 Riemann 度量的全体，可以证明，M 上 Einstein 度量对应于下列 Yamabe 泛函的临界点：

$$Q(g)=\frac{\int_M \kappa_g \,\mathrm{d}V_g}{\left(\int_M \mathrm{d}V_g\right)^{(n-2)/n}},\quad g\in\mathscr{M}. \tag{7.3}$$

其中 $\kappa_g=\frac{n-2}{4(n-1)}R_g$，$R_g$ 是 g 的数量曲率. 如果将泛函 Q 限制在某个度量 g_0 的共形等价类 $[g_0]$ 上，则这个限制泛函的临界点 $\tilde{g}$ 共形等价于 g_0 且数量曲率为常数. Yamabe 的作法是在 $[g_0]$ 上极小化 Q. 令

$$\lambda(M,g_0)=\inf\{Q(g):\ g\in[g_0]\}, \tag{7.4}$$

称为 Yamabe 共形不变量，它与共形等价类 $[g_0]$ 的基准度量 g_0 无关. 如果存在 $g\in\mathscr{C}_{g_0}$ 使得 $Q(g)=\lambda(M,g_0)$，则 g 具常数量曲率，记 $g=u^{\frac{4}{n-2}}g_0$，则 u 是 Yamabe 方程 (7.2) 的解，且 $\widetilde{R}=\mathrm{Const.}$.

为了获得 Einstein 度量，可进一步定义 mini-max

$$\Lambda(M)=\sup_{g_0\in\mathscr{M}}\ \inf_{g\in[g_0]} Q(g).$$

可以证明，若 $g\in\mathscr{M}$ 使 $Q(g)=\lambda(M,g)=\Lambda(M)$，则 g 是 Einstein 度量.

Yamabe 在将 $\lambda(M,g_0)$ 的极小化序列向极限过渡时犯了个错误. N. Trüdinger [202, 1968] 发现了这个错误，从此，这个未证明的结论就称作 Yanabe 猜想.

当 $\lambda(M,g_0)\le 0$ 时，Trüdinger [202] 可挽救 Yamabe 的证明，而且进一步指出，存在充分小常数 $\alpha(M,g_0)>0$，使得只要 $\lambda(M,g_0)<\alpha(M,g_0)$，那么 Yamabe 的证明就有效.

Yamabe 问题首次实质性进展是 Th. Aubin [3, 1976] 作出的. 他首先证明，只要 $\lambda(M,g_0)<\lambda(\mathbb{S}^n,g_0)=S$，则 Yamabe 问题总是可解的. 其中 $(\mathbb{S}^n,g_0)$ 是标准的单位球面，S 是最佳 Sobolev 常数. 通过巧妙构造试验函数，Aubin 证明：如果 $n\ge 6$ 且 (M,g) 不处处局部共形平坦，则 $\lambda(M,g_0)<S$，从而在此情形 Yamabe 猜想成立. T. Aubin 进一步猜想：

对于 $n \geq 3$ 维流形 (M, g)，要么 $\lambda(M, g) < \lambda(\mathbb{S}^n, g_0)$，要么 (M, g) 单连通且处处局部共形平坦（根据 Poincaré 猜想，这样的流形与标准球面共形等价）.

Yamabe 猜想的证明及其各种情形的解决方案证实了 T. Aubin 的猜想.

1984 年，R. Schoen [176] 应用广义相对论中的正质量定理，对 Aubin 定理未涵盖的其余情形，成功地构造出了试验函数，证明 $\lambda(M, g_0) < S$（除非它共形等价于标准球面），从而在此情形也证明了 Yamabe 猜想.

然而 Schoen 的证明不适用于 Aubin 定理的情形. Lee-Parker [129, 1987] 发现了共形法坐标系，一定程度上简化和统一了 Aubin 定理及 Schoen 定理的证明. 本章主要根据 Lee-Parker [129] 的工作展开，我们将证明 Yamabe 问题在任何情况下都有解，即有下列

定理 7.1 设 (M, g) 是 $n \geq 3$ 维紧致 Riemann 流形，则存在共形等价的度量 $\tilde{g} \in [g]$，使得 $\tilde{g}$ 的数量曲率 $\tilde{R} = \text{Const.}$ 为常数.

利用共形 Laplace 算子 $\Box = \Delta + \kappa$，将 Yamabe 方程 (7.2) 写为如下形式

$$\Box u = \tilde{\kappa} u^{N-1},\ u > 0 \quad \text{在 } M \text{ 中}, \tag{7.5}$$

其中

$$\kappa = \frac{n-2}{4(n-1)} R, \quad \tilde{\kappa} = \frac{n-2}{4(n-1)} \widetilde{R},$$

则定理 7.1 要证明的是，对于适当常数 $\tilde{\kappa}$，方程 (7.5) 存在正解. 稍后将看到，$\tilde{\kappa}$ 可取为 $\tilde{\kappa} = \operatorname{sgn}\lambda(M)$，其中 $\lambda(M)$ 是 (M, g) 的 Yamabe 不变量.

第一节 变分方法

一、Yamabe 不变量 $\lambda(M)$

1. **Yamabe 商**. 为求解方程 (7.5)，考虑所谓 Yamabe 商：

$$Q(g, u) = \frac{\int \left(|\nabla u|^2 + \kappa |u|^2\right) \mathrm{d}V}{\|u\|_N^2}. \tag{7.6}$$

显然 Yamabe 方程 (7.5) 的解对应于泛函 $Q(g, u)$ 的临界点. 在度量的共形变换 $\tilde{g} = \varphi^{4/(n-2)} g$ 下，Yamabe 商有这样的共形不变性：

$$Q(g, \varphi u) = Q(\tilde{g}, u). \tag{7.7}$$

确实，度量 $\tilde{g}$ 的体积元 $\mathrm{d}\tilde{V} = \varphi^N \mathrm{d}V$，根据共形 Laplace 算子 $\Box = -\Delta + \kappa$ 的共形不变性 (见 p.181)，我们有

$$Q(g, \varphi u) = \frac{\int (\varphi u)\Box(\varphi u)\,\mathrm{d}V}{\left(\int |\varphi u|^N \mathrm{d}V\right)^{2/N}} = \frac{\int (u\tilde{\Box}u)\varphi^N \mathrm{d}V}{\left(\int |u|^N \varphi^N \mathrm{d}V\right)^{2/N}},$$

其中 $\tilde{\Box} = \tilde{\Delta} + \tilde{\kappa}$ 是度量 $\tilde{g}$ 下的共形 Laplace 算子. 于是，$Q(g, \varphi u) = Q(\tilde{g}, u)$.

由 (7.7)，我们得到一个只与 g 的共性等价类 $[g]$ 有关而与等价类中具体 g 无关的量，

$$\begin{aligned}\lambda(M) &\triangleq \inf_u \left\{Q(g,u) : 0 \neq u \in H^1(M)\right\}\\ &= \inf_{\tilde{g}} \left\{Q(\tilde{g}, 1) : \tilde{g} \in [g]\right\}.\end{aligned}$$

$\lambda(M)$ 称为 (M, g) 的 Yamabe 共形不变量.

由 (7.6) 式知，$\lambda(M)$ 的符号与共形 Laplace 算子 $\Box = -\Delta + \kappa$ 的最小特征值的符号一致. 特别，$\lambda(M) > 0$ 当且仅当 $\Box = -\Delta + \kappa$ 强制.

今后，如若不致引起混淆，我们将简写 Yamabe 商为 $Q(u)$，并将 Yamabe 问题化归为下列极值问题

$$\lambda(M) = \inf_{0 \neq u \in H^1(M)} Q(u). \tag{7.8}$$

因极值问题 (7.8) 具有共形不变性，故缺乏古典变分法所需的全局紧性条件. Yamabe 问题的困难正在于此.

2. **等式** $\lambda(\mathbb{S}^n) = S$.

在研究 Yamabe 问题及数量曲率问题时，Sobolev 嵌入 $L^{\frac{2n}{n-2}}(M) \to H^1(M)$ 的最佳常数 S 及在 $\mathbb{R}^n$ 上的极值函数，扮演着重要角色. $\mathbb{R}^n$ 的 Yamabe 不变量就是最佳 Sobolev 常数，即

$$\lambda(\mathbb{R}^n) = \inf\left\{Q(dx^2, u) : 0 \neq u \in H^1(\mathbb{R}^n)\right\} = S,$$

其中 dx^2 是标准欧氏度量. 最佳 Sobolev 常数 S 可被下列一族函数取到（见第 53 页定理 2.6）:

$$\psi_\varepsilon = (\varepsilon + |x|^2)^{(2-n)/2}. \tag{7.9}$$

对于 $\mathbb{R}^n$ 的有界区域 Ω，$\lambda(\Omega) = S$ (这里 $\inf Q(g_0, u)$ 在 $H_0^1(\Omega)$) 上取)，它不能够在 $H_0^1(\Omega)$ 上取到，当 $\varepsilon \to 0$ 时，S 可以被下列函数族无限逼近:

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\alpha(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{(n-2)/2}}. \tag{7.10}$$

这里 α 是一径向对称的光滑截断函数，在球 B_δ 内取 1，在球 $B_{2\delta}$ 外恒等于零，δ 是适当小的正数. 这也就是说，当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时，

$$\frac{\int_{B_{2\delta}} |\nabla_0 u_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x}{\left(\int_{B_{2\delta}} |u_\varepsilon|^N \mathrm{d}x\right)^{2/N}} = S + o(1). \tag{7.11}$$

现在讨论 $\lambda(\mathbb{S}^n)$. 设 $P = (0, \ldots, 0, 1)$ 是 $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 的北极，考虑球极投影 $\sigma : \mathbb{S}^n - \{P\} \to \mathbb{R}^n$. 按定义，

$$x = \sigma(\xi, \zeta) = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad (\xi, \zeta) \in \mathbb{S}^n \setminus \{P\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

拉回映射 σ^* 在 $\mathbb{S}^n$ 上诱导的度量正是 $\mathbb{S}^n$ 上的标准度量 ds^2，且

$$ds^2 = \sigma^*(dx^2) = \frac{4dx^2}{(1+|x|^2)^2} = h^{4/(n-2)} dx^2,$$

其中 $h = 4^{(n-2)/4}\psi_1$. $h^{4/(n-2)}dx^2$ 既可看作是 $\mathbb{S}^n$ 的标准度量 ds^2 在局部坐标系 $\{x^i\}$ 下的表达，也可看作是 $\mathbb{R}^n$ 上标准度量的（非完备）共形变换. 取 $\mathbb{S}^n - \{P\}$ 的共形度量 $h^{4/(2-n)}ds^2 = dx^2$，这是 $\mathbb{R}^n$ 上的标准度量. 根据 Q 的共形不变性

$$Q(ds^2, h^{-1}u) = Q(h^{4/(2-n)}ds^2, u) = Q(dx^2, u),$$

或更直白地

$$Q(ds^2, h^{-1}u) = \frac{\int_{\mathbb{S}^n} (h^{-1}u)\Box(h^{-1}u)\mathrm{d}V}{\left(\int_{\mathbb{S}^n} |h^{-1}u|^N \mathrm{d}V\right)^{2/N}} = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_0 u|^2 \mathrm{d}x}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^N \mathrm{d}x\right)^{2/N}},$$

我们立得 $\lambda(S^n) = S$. 由于 $\mathbb{R}^n$ 上最佳 Sobolev 常数可被 $u = h$ 取到，这意味着 $\lambda(S^n)$ 可被常值函数 1 取到. 这一事实为我们计算最佳 Sobolev 常数 S 提供了另一种方法（K. Uhlenbeck 的方法）. 注意到 $(\mathbb{S}^n, ds^2)$ 的数量曲率 $R = n(n-1)$，$\kappa = 4^{-1}n(n-2)$，我们有

$$\begin{aligned} S &= \lambda(\mathbb{S}^n) = Q(ds^2, 1) \\ &= \kappa\,\omega_n^{2/n} = 4^{-1}n(n-2)\omega_n^{2/n}. \end{aligned} \tag{7.12}$$

3. Aubin **不等式** $\lambda(M) \le \lambda(S^n)$.

一般紧致 Riemann 流形的 Yamabe 不变量 $\lambda(M)$ 不会超过标准球面的 Yamabe 不变量 $\lambda(\mathbb{S}^n)$，我们把这一结论写成

引理 7.2（Aubin [3]） 设 (M,g) 是 $n \geq 3$ 维紧致 Riemann 流形，则 $\lambda(M) \leq \lambda(\mathbb{S}^n)$.

证明 设 $\{x^i\}$ 是某点 $P \in M$ 的测地法坐标系，取 u_ε 如 (7.10). 我们来估计 $Q(g, u_\varepsilon)$. 这个估计并不需要特别精细.

因 u_ε 是径向函数，所以 $|\nabla u_\varepsilon|^2 = |\partial_r u_\varepsilon|^2$，即 $|\nabla u_\varepsilon|^2 = |\nabla_0 u_\varepsilon|^2$，$\nabla_0$ 是欧氏梯度. 此外，在测地法坐标系中，体积元素 $\mathrm{d}V = \big(1 + O(|x|^2)\big)\mathrm{d}x$，因而

$$\int_M |\nabla u_\varepsilon|^2 \mathrm{d}V = \big(1 + O(\delta^2)\big) \int_{B_{2\delta}} |\nabla_0 u_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x,$$

$$\int_M |u_\varepsilon|^N \mathrm{d}V = \big(1 + O(\delta^2)\big) \int_{B_{2\delta}} |u_\varepsilon|^N \mathrm{d}x.$$

应用 Hölder 不等式可推出

$$\int_M \kappa |u_\varepsilon|^2 \mathrm{d}V \leq C \int_{B_{2\delta}} |u_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x \quad \leq C_1 \delta^2 \Big(\int_{B_{2\delta}} |u_\varepsilon|^N \mathrm{d}x\Big)^{2/N}.$$

这样

$$Q(g, u_\varepsilon) = \frac{\int_{B_{2\delta}} |\nabla_0 u_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x}{\Big(\int_{B_{2\delta}} |u_\varepsilon|^N \mathrm{d}x\Big)^{2/N}} \big(1 + O(\delta^2)\big). \tag{7.13}$$

在上式中先令 $\varepsilon \to 0$，再令 $\delta \to 0$，注意两个积分的比值趋于 S（见 (7.11)），因而我们有 $\lambda(M) \leq S$. □

二、Aubin 的判据

Yamabe 问题的第一个突破属于 Trüdinger [202]，他证明存在一个常数 $\alpha > 0$，使得只要 $\lambda(M) < \alpha$，则 Yamabe 问题可解，尤其当 $\lambda(M) \leq 0$ 时.

Aubin [3] 精确给出 $\alpha = \lambda(\mathbb{S}^n)$，并证明只要 $\lambda(M) < \lambda(\mathbb{S}^n)$，则 Yamabe 问题可解. 这一结论在变分法上已成为解决相关问题的一个准则.

定理 7.3（Aubin [3]） *设 (M,g) 是 $n \geq 3$ 维紧致 Riemann 流形，若 $\lambda(M) < \lambda(\mathbb{S}^n)$，则 Yamabe 方程 (7.5) 存在一正解 $u \in C^\infty(M)$.*

注记 7.1　定理 7.3 将 Yamabe 问题的可解性归结为寻找试验函数 φ，使得 $Q(g, \varphi) < \lambda(\mathbb{S}^n)$.

下面我们用两种方法证明定理 7.3，一个是 H. Brezis 与 L. Nirenberg 后来在文献 [52] 中提供的方法，另一个是 Aubin [3] 原来的方法.

1. Brezis-Nirenberg 的证明.

事实上，我们有比定理 7.3 更强的结论. 考虑极值问题 (7.8) 的一个极小化序列 $\{u_m\} \subset H^1(M)$，即

$$\|\nabla u_m\|_2^2 + \int \kappa u_m^2 = \lambda(M) + o(1), \quad \|u_m\|_N = 1. \tag{7.14}$$

引理 7.4 如果 $\lambda(M) < \lambda(\mathbb{S}^n)$，则由 (7.14) 定义的任意一个 $\lambda(M)$ 的极小化序列在 $H^1(M)$ 中都是相对 (强) 列紧的.

证明 引理 7.4 的证明与引理 2.7 的证明几乎完全一样，证明的关键仍是 Brezis-Lieb 分解及最佳 Sobolev 不等式，只不过这时最佳 Sobolev 不等式采取 Hebey-Vaugon 定理的形式 (见第 182 页定理 6.3). □

定理 7.3 的证明 I 由引理 7.4 知，$\lambda(M)$ 被某个 $u \in H^1(M)$ 取到. 我们可以假定 $u \geq 0$，否则用 $|u|$ 替代 (注意 $\|\nabla|u|\,\|_2 \leq \|\nabla u\|_2$). 因为 u 是极小化问题 (7.8) 的解，故存在 Lagrange 乘数 μ 使得

$$-\Delta u + \kappa u = \mu u^{N-1}, \quad x \in M.$$

由 Brezis-Kato-Nirenberg 正则化定理，$u \in L^p(M)\ \forall p \geq 2$，从而一般正则化手段可证 $u \in C^\infty(M)$，根据强极大值原理，在 M 上 $u > 0$.

2. Aubin 的证明.

因 $\lambda(M) \leq 0$ 的情形较简单，在介绍 Aubin 的方法时，只讨论 $\lambda(M) > 0$ 的情况. 由于共形不变性，我们可设 (M, g) 的体积 $\int_M \mathrm{d}V_g = 1$.

Aubin 的方法是用次临界情形逼近临界情形. 对于 $q \in [2, N]$，定义

$$Q_q(u) = \frac{\int \left(|\nabla u|^2 + \kappa |u|^2\right) \mathrm{d}V}{\|u\|_q^2}. \tag{7.15}$$

并考虑极值问题

$$\mu_q = \inf\left\{Q_q(u) : u \in H^1, \|u\|_q = 1\right\}. \tag{7.16}$$

显然极值问题 (7.16) 的解对应下列非线性椭圆方程的解：

$$-\Delta u + \kappa u = \mu_q u^{q-1} \quad \text{在 } M \text{ 中}. \tag{7.17}$$

用经典变分法可证明

命题 7.5 设 $q \in [2, N)$，则极值问题 (7.16) 存在恒正的解 $u_q \in C^\infty(M)$. 此外，u_q 满足方程 (7.17).

下面考察 (μ_q, u_q) 的行为. 注意 $Q(u_q) = \mu_q$, $\|u_q\|_q = 1$. 首先有

引理 7.6 (Aubin [3]) 设 (M, g) 的体积体积等于 1. 假定 $\lambda(M) > 0$，则 μ_q 在 $q \in [2, N]$ 上单调减且左连续. 进而 $\lambda(M) = \mu_N = \lim_{q\uparrow N} \mu_q$.

证明 设 $0 \neq u \in H^1(M)$，因 $\lambda(M) > 0$，故 $Q_q(u) > 0$. 因 M 的体积等于 1，应用 Hölder 不等式知，$\|u\|_p$ 关于 p 单调增，固定 $q \in [2, N]$，对任意 $p < q$，

$$Q_q(u) = \left(\|u\|_p^2 \cdot \|u\|_q^{-2}\right) Q_p(u) \leq Q_p(u),$$

因此 $\mu_q \leq \mu_p$，当然有 $\mu_q \leq \lim_{p\uparrow q} \mu_p$. 另一方面，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists u \in H^1(M)$ 使得 $\mu_q \geq Q_q(u) - \varepsilon$，于是 (注意 $p < q$)

$$\begin{aligned}\mu_q \geq Q_q(u) - \varepsilon &= \left(\|u\|_p^2 \cdot \|u\|_q^{-2}\right) Q_p(u) - \varepsilon \\ &\geq \left(\|u\|_p^2 \cdot \|u\|_q^{-2}\right) \mu_p - \varepsilon.\end{aligned}$$

注意到 $\|u\|_q$ 关于 $q \in [2, N]$ 连续，我们有 $\lim_{p\uparrow q} \mu_p \leq \mu_q$. □

命题 7.7 (Aubin [3]) 设 $0 < \lambda(M) < \lambda(\mathbb{S}^n)$，则存在常数 $\varepsilon > 0$ 及 $\delta > 0$，使得极值问题 (7.16) 的解构成的集合 $\{u_q : N - \varepsilon < q < N\}$ 在 $L^{(1+\delta)N}(M)$ 中一致有界.

证明 设 $\delta \geq 0$，用 $(u_q)^{1+2\delta}$ 乘 (7.17)，积分，分部积分得 (略去下标 q)

$$(1 + 2\delta) \int u^{2\delta} |\nabla u|^2 + \int \kappa u^{2+2\delta} = \mu_q \int u^{q+2\delta}, \tag{7.18}$$

因 $\lambda(M) > 0$，算子 $-\Delta + \kappa$ 在 H^1 上强制，在 (7.18) 中取 $\delta = 0$，注意到 $\|u\|_q = 1$，$\mu_q \leq \mu_2$，推出 $\{u_q\}$ 在 H^1 中，从而在 L^2 中有界.

下设 $\delta > 0$，记 $C = \max |\kappa|$，由 (7.18) 得

$$\frac{1 + 2\delta}{(1 + \delta)^2} \int |\nabla u^{1+\delta}|^2 \leq \mu_q \int u^{q+2\delta} + C \int u^{2+2\delta} \tag{7.19}$$

应用 Hölder 不等式，我们有

$$\int u^{q+2\delta} = \int u^{2(1+\delta)} \cdot u^{q-2} \leq \|u\|_{n(q-2)/2}^{q-2} \cdot \|u^{1+\delta}\|_N^2$$

但因 $q < N$，我们有 $n(q-2)/2 < q$，再次应用 Hölder 不等式，

$$\|u\|_{n(q-2)/2} \le \|u\|_q = 1.$$

若令 $w = u^{1+\delta}$，则由 (7.19) 得

$$\frac{1+2\delta}{(1+\delta)^2}\|\nabla w\|_2^2 \le \mu_q\|w\|_N^2 + C\|w\|_2^2 \tag{7.20}$$

应用 Sobolev 不等式

$$S\|w\|_N^2 \le \|\nabla w\|_2^2 + A\|w\|_2^2,$$

于是由 (7.20) 得

$$\Big(\frac{1+2\delta}{(1+\delta)^2}S - \mu_q\Big)\|w\|_N^2 \le (A+C)\|w\|_2^2 \tag{7.21}$$

由于 $\lim_{q\uparrow N}\mu_q = \lambda(M) < S$，于是存在不依赖于具体 q 的正数 ε，δ，及 C_0，使得当 $q \in (N-\varepsilon, N)$ 时，

$$\Big(\frac{1+2\delta}{(1+\delta)^2}S - \mu_q\Big) \ge C_0.$$

因此 (7.21) 变为 $\|w\|_N^2 \le C\|w\|_2^2$，因而 $\|u_q\|_{(1+\delta)N}$ 一致有界. 用一般正则化手段可证明对于任意 $p \ge 2$，$\|u_q\|_p \le C_p$， $\forall\, q \in (N-\varepsilon, N)$. □

定理 7.3 的证明 II 根据命题 7.7，当 $q \to N$ 时，u_q 在 $L^p(M)$ 中一致有界，根据一般正则化理论，u_q 在 $C^{2,\alpha}(M)$ 中一致有界，故根据 Arzela-Ascoli 定理，存在 q 的子列，使得 u_q 在 $C^{2,\alpha}(M)$ 中一致收敛于某 $u \in C^2(M)$. 从而 u 满足

$$-\Delta u + \kappa u = \lambda(M)u^{N-1}, \quad Q_N(u) = \lambda(M).$$

最后，由于 $Q_N(u) = \lambda(M) > 0$，$u \neq 0$，由强极大值原理，$u > 0$. 由 Schauder 理论，$u \in C^\infty(M)$.

第二节 共形法坐标系

Riemann 几何中，使用测地法坐标系可以极大地简化局部分析表达. 为简化 Yamabe 问题的证明，Lee-Parker [129] 引入 共形法坐标系，conformal normal

coordinate charts，通过适当的共形变换，某个给定点的 Riemann 度量矩阵的行列式 $|g|$ 可以充分平坦地接近 1，这样，大大简化了 Yamabe 问题的证明.

一、度量张量的估计

引理 7.8 [Petrov [168]] 设 (M, g) 是 Riemann 流形，$P \in M$. 那么在 P 点的测地法坐标系 $\{x^i\}$ 下，度量矩阵的行列式 $|g| = \det(g_{ij})$ 有如下展开:

$$\begin{aligned}|g| = 1 &- \frac{1}{3}R_{ij}x^ix^j - \frac{1}{6}R_{ij,k}x^ix^jx^k \\ &- \Big(\frac{1}{20}R_{ij,kl} + \frac{1}{90}R_{hijm}R_{hklm} - \frac{1}{18}R_{ij}R_{kl}\Big)x^ix^jx^kx^l + O(r^5),\end{aligned}$$

其中 $r = |x|$，展式中曲率张量的系数均取值于 P.

证明 以下估计中用到 Jacobi 场的概念，可参阅 173 页相关内容.

设 $\{U, x^i\}$ 是 P 点的测地法坐标系，在此坐标系下，U 与 $\mathbb{R}^n$ 的一个开区域等同. 对于固定的 τ, $\xi \in \mathbb{R}^n$，由 $\phi(s,t) = t(\tau + s\xi)$ 定义的映射 $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ 确定一族由原点发出的单参数测地线，$\gamma_s = \phi(s, \cdot)$. γ_s 是 $\gamma_0 = t\tau$ 的一个测地变分，其变分向量场

$$X \triangleq \phi_*(\partial/\partial s)|_{s=0} = t\xi$$

是一个沿测地线 γ_0 的 Jacobi 常见 174 页例 6.1）. 记 $T = \phi_*(\partial/\partial t)$，即 $T = \frac{\mathrm{d}\gamma_s}{\mathrm{d}t}$，那么 X 满足初始条件 $X|_{t=0} = 0$，$\mathrm{D}_TX|_{t=0} = \xi$ 及 Jacobi 方程

$$\mathrm{D}_T^2X = \mathcal{R}(T, X)T \ (\triangleq R_T(X)) \qquad \text{(Jacobi)}$$

其中 $R_T(\cdot) = \mathcal{R}(T, \cdot)T$，$\mathcal{R}$ 是曲率算子. 令 $f(t) \triangleq \langle |X(t), |X(t)\rangle$，我们来求 $f(t)$ 的 Taylor 展式. 由 Riemann 联络的相容性条件 (6.1) 及 Jacobi 方程得

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_Tf(t) &= 2\langle \mathrm{D}_TX, X\rangle, \\ \mathrm{D}_T^2f(t) &= 2\langle R_TX, X\rangle + 2\langle \mathrm{D}_TX, \mathrm{D}_TX\rangle, \\ \mathrm{D}_T^3f(t) &= 2\langle \mathrm{D}_T^3X, X\rangle + 6\langle R_TX, \mathrm{D}_TX\rangle.\end{aligned}$$

由初始条件得

$$\mathrm{D}_Tf(0) = 0, \quad \mathrm{D}_T^2f(0) = 2\langle \xi, \xi\rangle_0, \quad \mathrm{D}_T^3f(0) = 0.$$

类似可得

$$\mathrm{D}_T^4 f(0) = 8\langle R_\tau \xi, \xi\rangle_0, \quad \mathrm{D}_T^5 f(0) = 20\langle (\mathrm{D}_\tau R_\tau)\xi, \xi\rangle_0,$$
$$\mathrm{D}_T^6 f(0) = 36\langle (\mathrm{D}_\tau^2 R_\tau)\xi, \xi\rangle_0 + 32\langle R_\tau \xi, R_\tau \xi\rangle_0.$$

因此，我们有展式（可参阅 Cheeger-Ebin [78]或陈维桓等 [220]）

$$\begin{aligned}\langle \xi, \xi\rangle_{t\tau} &= t^{-2}|X(\gamma_0(t))|^2 \\ &= \langle \xi, \xi\rangle_0 + \frac{t^2}{3}\langle R_\tau \xi, \xi\rangle_0 + \frac{t^3}{6}\langle (\mathrm{D}_\tau R_\tau)\xi, \xi\rangle_0 \\ &\quad + \frac{t^4}{20}\langle (\mathrm{D}_\tau^2 R_\tau)\xi, \xi\rangle_0 + \frac{2t^4}{45}\langle R_\tau \xi, R_\tau \xi\rangle_0 + O(t^5).\end{aligned} \tag{7.22}$$

取 $t\tau = x = x^i\partial_i$，并先后令 $\xi = \partial_i \pm \partial_j$，则由上式（利用 Riemann 曲率的对称性）求得

$$\begin{aligned}g_{pq}(x) &= \delta_{pq} + \frac{1}{3}R_{pijq}x^ix^j + \frac{1}{6}R_{pijq,k}x^ix^jx^k \\ &\quad + \left(\frac{1}{20}R_{pijq,kl} + \frac{2}{45}R_{pijm}R_{qklm}\right)x^ix^jx^kx^l + O(r^5).\end{aligned} \tag{7.23}$$

令 $(g_{pq}) = \exp(A_{pq})$，则

$$\begin{aligned}A_{pq}(x) &= \frac{1}{3}R_{pijq}x^ix^j + \frac{1}{6}R_{pijq,k}x^ix^jx^k \\ &\quad + \left(\frac{1}{20}R_{pijq,kl} + \frac{2}{45}R_{pijm}R_{qklm}\right)x^ix^jx^kx^l + O(r^5),\end{aligned} \tag{7.24}$$

那么，$\det(g_{pq}) = \exp(\mathrm{tr}(A_{pq}))$ 具有引理 7.8 所求的展开式. 证毕. □

注记 7.2 由 (7.23) 及 (7.24) 的导出过程不难看出，$|g|$ 的 $\nu(\geq 2)$ 阶 Taylor 展式具有如下形式：

$$|g| = 1 + \sum_{|\alpha|=0}^{\nu-2} c_\alpha(R_{ij,\alpha} - T_{ij\alpha})x^ix^jx^\alpha + O(r^{\nu+1}) \tag{7.25}$$

其中 $T_{ij\alpha}$ 由曲率的小于 α 阶的导数构成，$\{T_{ij\alpha}\}_{i,j;|\alpha|=k}$ 是 T_PM 上的 $(k+2)$ 阶对称张量的分量.

事实上，由 (7.22) 式看，$\langle \xi, \xi\rangle_{t\tau}$ 展式中的每一项都具如下形式：

$$c_kt^k\left[\langle (D_\tau^{k-2})\xi, \xi\rangle + B_k(\xi, \xi)\right]$$

其中 c_k 为常数，B_k 是由 R_τ 的阶数小于 $(k-2)$ 的导数所构成的双线性型，因而 $|g|$ 的展式有如 (7.25).

二、共形法坐标系

在适当的共形变换下，我们将满足下列定理 7.9 条件的坐标系叫做共形法坐标系或保角正规坐标系.

定理 7.9 设 M_n 是一 Riemann 流形，点 $P \in M$，则对于任意 $\nu \geq 2$，存在 M 的共形度量 g，使得在 P 点的某一法坐标系 (U, x^i) 下

$$|g| = 1 + O(r^\nu) \quad (r = |x|).$$

如果 $\nu \geq 5$，那么流形 (M, g) 在 P 点的数量曲率 R 及 Weyl 张量 W 满足

$$R(P) = O(r^2), \quad -\Delta R(P) = \frac{1}{6}|W(P)|^2.$$

定理 7.9 的证明有赖下列引理.

引理 7.10 给定 $P \in (M, g)$，设 $T \in T_P^{k+2}(M)$ 是 $(k+2)$ 阶对称张量. 那么存在唯一的一个 $(k+2)$ 次齐次多项式 f，使得在 g 的法坐标系 $\{x^i\}$ 中，度量 $\tilde{g} = e^{2f} g$ 满足

$$\operatorname{Sym}\big(\widetilde{\nabla}^k \tilde{R}_{ij}\big)(P) = T, \tag{7.26}$$

其中 $\operatorname{Sym}(\cdot)$ 表示张量的对称化，$\widetilde{\nabla}$ 及 $\tilde{R}_{ij}$ 分别是 $\tilde{g}$ 的协变微分算子和 Ricci 曲率张量.

证明 在局部坐标系 $\{x^i\}$ 中，将 P 与原点 $x = 0$ 等同. 记 $\mathscr{P}_m$ 为 x 的 m 次齐次多项式构成的空间. 令 $F_g(x) = R_{ij}(x) x^i x^j$，用 Taylor 公式展开，得

$$F_g(x) = \sum_{m=2}^{k+2} F_g^{(m)}(x) x^i x^j + O(r^{k+3}),$$

其中

$$F_g^{(m)}(x) = \frac{1}{(m-2)!} \partial_\alpha R_{ij}(0) x^i x^j x^\alpha \in \mathscr{P}_m,$$

上式中采用了求和约定，求和遍及 i, j 及 $(m-2)$ 重指标 α，$|\alpha| = m-2$. 用 $F_{\tilde{g}}^{(m)}(x)$ 表示对应于 $\tilde{g}$ 的相应多项式.

考察 Ricci 曲率 R_{ij} 的 α 阶协变导数与普通偏导数之间的关系，我们有

$$R_{ij,\alpha} = \partial_\alpha R_{ij} + S_{ij\alpha},$$

其中 $S_{ij\alpha}$ 是曲率 R_{ij} 的阶数 $0 \le \beta < \alpha$ 的偏导数构成的多项式. 因此，若 $f \in \mathscr{P}_{k+2}$，$\tilde{g} = e^{2f}$，则对 $|\alpha| = k$ 有 $\widetilde{S}_{ij\alpha} = S_{ij\alpha}$.

又，引理中 (7.26) 可等价地写作（采用求和约定，$|\alpha| = k$）

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{k!}\big(\widetilde{R}_{ij,\alpha} - T_{ij\alpha}\big)x^i x^j x^\alpha \\ &= F_{\tilde{g}}^{(k+2)}(x) + \frac{1}{k!}\big(S_{ij\alpha} - T_{ij\alpha}\big)x^i x^j x^\alpha. \end{aligned} \tag{7.27}$$

对于 $(k+2)$ 次齐次多项式 f，有一个 Euler 公式

$$x^i x^j \partial_i \partial_j f = (x^i \partial_i)^2 f - x^i \partial_i f = (k+2)(k+1)f,$$

依然，因 f 是 $(k+2)$ 次齐次多项式，(M, g) 上的 Laplace 算子 Δ 与欧式 Laplacian Δ_0 有下列关系

$$\Delta f = \Delta_0 f + O(r^{k+1}),$$

然后应用共形变换下 Ricci 曲率 R_{ij} 与 $\widetilde{R}_{ij}$ 的关系 (6.6) 得

$$\begin{aligned} F_{\tilde{g}}^{(k+2)}(x) &= F_g^{(k+2)}(x) - x^i x^j \big[(n-2)\partial_i \partial_j f + (\Delta_0 f)\delta_{ij}\big] \\ &= F_g^{(k+2)}(x) - (n-2)(k+2)(k+1)f - r^2 \Delta_0 f. \end{aligned}$$

现在定义算子

$$Lf \triangleq r^2 \Delta_0 f + (n-2)(k+2)(k+1)f,$$

则根据 (7.27)，引理 7.10 的证明化为寻找 $\mathbb{R}^n$ 上的齐次多项式 $f \in \mathscr{P}_{k+2}$，使得

$$Lf = \text{给定的 } (k+2) \text{ 次齐次多项式}.$$

但下列引理说，作为有限维空间 $\mathscr{P}_{k+2}$ 上的线性算子，$L : \mathscr{P}_{k+2} \to \mathscr{P}_{k+2}$ 可逆，从而完成引理的证明. □

引理 7.11 线性空间 $\mathscr{P}_m$ 上的线性算子 $r^2\Delta_0 : \mathscr{P}_m \to \mathscr{P}_m$ 的特征值是

$$\lambda_j = 2j(n-2+2m-2j), \quad j = 0, 1, \cdots, [m/2].$$

对应于 λ_j 的特征函数是形如 $r^{2j}\psi$ 的函数，其中 $\psi \in \mathscr{P}_{m-2j}$ 是调和多项式.

证明 当 $m=0$ 或 $m=1$ 时 $r^2\Delta_0=0$，引理显然成立. 对于 $m\geq 2$，设 $f\in\mathscr{P}_m$ 满足 $r^2\Delta_0 f=\lambda f$. 由 Euler 公式，$\Delta_0 f\in\mathscr{P}_{m-2j}$ 满足

$$\begin{aligned}\lambda\Delta_0 f&=\Delta_0(r^2\Delta_0 f)\\&=\Delta_0(r^2)\Delta_0 f+4x^i\partial_i\Delta_0 f+r^2\Delta_0^2 f\\&=2n\Delta_0 f+4(m-2)\Delta_0 f+r^2\Delta_0^2 f,\end{aligned}$$

因此，

$$r^2\Delta_0(\Delta_0 f)=(\lambda-2n-4m+8)\Delta_0 f.$$

这表明，(α) 或者 $\Delta_0 f=0$，因而 $\lambda=0$ 而 f 调和；(β) 或者 $(\lambda-2n-4m+8)$ 是算子 $r^2\Delta_0$ 在 $\mathscr{P}_{m-2}$ 上的特征值，对应的特征函数为 $\Delta_0 f$. 在后一种情形，f 可表示为 $f=\lambda^{-1}r^2\Delta_0 f$. 最后，引理的证明由归纳法完成. □

定理 7.9 的证明 对 $\nu\geq 2$ 归纳地证明，存在 M 的一个共形度量 g，使得在 g 的法坐标系 (U,x^i) 下，$\det(g_{ij})=1+O(r^\nu)$. 注意 $\nu=2$ 时这个结论是一般法坐标系应有的性质. 现假定对于 ν 展式成立. 从而根据注记 7.2 的 (7.25) 式，$|g|$ 中的 ν 阶 Taylor 展式取如下形式：

$$|g|=1+\sum_{|\alpha|=\nu-2}c_\alpha(R_{ij,\alpha}-T_{ij\alpha})x^ix^jx^\alpha+O(r^{\nu+1}),\tag{7.28}$$

其中 $T_{ij\alpha}$ 是 T_PM 上某个 ν 阶对称张量 T 的分量.

由引理 7.10，存在 $f\in\mathscr{P}_N$，使得在共形变换 $\tilde{g}=e^{2f}g$ 下，成立 $\mathrm{Sym}(\widetilde{D}^{N-2}R_{ij})=\widetilde{T}$. 因 f 为 ν 次齐次多项式，$\tilde{g}$ 具有与 (7.28) 式相同的展式，只是其中 R_{ij} 与 T 换成了 $\widetilde{R}_{ij}$ 与 $\widetilde{T}$. 但在 $f\in\mathscr{P}_\nu$ 的情形，$\widetilde{T}=T$. 故由 $\mathrm{Sym}(\widetilde{D}^{\nu-2}R_{ij})=\widetilde{T}$ 推出 $|\tilde{g}|=1+O(r^{\nu+1})$，这就完成了 $|g|$ 的渐近展式的归纳证明.

现设 $\nu\geq 5$，则 $|g|=1+O(r^5)$，对比定理 7.8 中 $|g|$ 的展式，我们可知

$$R_{ij}=0,\tag{7.29}$$

$$R_{ij,k}+R_{jk,i}+R_{ki,j}=0,\tag{7.30}$$

$$\mathrm{Sym}\Big(R_{ij,kl}+\frac{2}{9}R_{pijm}R_{pklm}\Big)=0.\tag{7.31}$$

由 (7.29) 式知，$R_{ijkl}=W_{ijkl}$ (Weyl 张量的定义见 P.180)，此外

$$R_{ij,kl}-R_{ij,lk}=R^m_{ikl}R_{mj}+R^m_{jkl}R_{im}=0,$$

故由 (7.31) 得

$$
\begin{aligned}
0 = & \left(R_{ij,kl} + R_{kl,ij} + 2R_{ik,jl} + 2R_{jl,ik}\right)x^i x^j \\
& + \frac{2}{9}\big(W_{pijm}W_{pklm} + W_{pikm}W_{pjlm} + W_{pkim}W_{pjlm} \\
& \quad + W_{pjkm}W_{plim} + W_{pkjm}W_{plim} + W_{plkm}W_{pjim}\big)x^i x^j.
\end{aligned}
$$

现缩并指标 k, l，注意 Bianchi 恒等式 (见 171 页)，$R_{,j} = 2R^i_{j,i}$，以及 Weyl 张量的对称性，$W_{pikm}W_{pkjm} = \frac{1}{2}W_{pikm}(W_{pkjm} - W_{pmjk}) = \frac{1}{2}W_{pikm}W_{pjkm}$，缩并的结果为

$$
0 = \left(3R_{,ij} + R_{ij,kk} + \frac{2}{3}W_{ipkm}W_{ipkm}\right)x^i x^j.
$$

再缩并 i, j 得 $-\Delta R = -R_{,ii} = \frac{1}{6}|W|^2$.

最后，由 (7.29)，$R(P) = R_{ii}(P) = 0$. 由 (7.30) 缩并得 $R_{,j} = -2R_{ij,i}$ 与 Bianchi 恒等式 $R_{,j} = 2R^i_{j,i}$ 相加得 $2R_j = 0$. 定理 7.9 证毕. □

注记 7.3　在定理 7.9 的证明过程中，$\tilde{g}$ 的测地法坐标系 $\{x^i\}$ 不再是 g 的测地法坐标系，但由于度量的共形变换 $\tilde{g} = e^{2f}g$ 中 f 是 N 次齐次多项式，只要作一个变量替换 $\tilde{x}^i = x^i + O(|x|^N)$，可使 $\{\tilde{x}^i\}$ 成为 g 的测地法坐标系，而在新坐标系下，$\det(\tilde{g}) = 1 + O(|\tilde{x}|^{N-2})$. 以后凡说到共形法坐标系，都指的是这样的测地法坐标系，且其中的 N 充分大.

三、Aubin 的定理

现在，我们回到 Yamabe 问题. 有了 Lee-Parker 共形法坐标系，我们可以比较容易地证明下列定理.

定理 7.12 (Aubin [3])　设 (M, g) 是 $n \geq 6$ 维紧致 Riemann 流形，不处处共形平坦，则 $\lambda(M) < \lambda(\mathbb{S}^n)$，因而 Yamabe 泛函的最小值 $\lambda(M)$ 可被某个严格正的光滑函数取到，而 Yamabe 问题在此情形可解.

为证明定理 7.12，根据定理 7.3 及其注记，我们只须寻找一个试验函数 $\varphi \in H^1(M)$，使得 $Q(\varphi) < \lambda(\mathbb{S}^n)$. 其中 $Q(\varphi) = Q(g, \varphi)$ 由 (7.6) 式定义.

因 (M, g) 不处处共形平坦，故存在一点 $P \in M$ 使得 (M, g) 在该点的 Weyl 张量 $|W(P)| \neq 0$. 而由于 Yamabe 不变量 $\lambda(M)$ 及 Weyl 张量都是共形不变的，我们可适当选择 P 点的共形法坐标系，以简化分析. 根据定理 7.9，存在 P 点

的共形法坐标系 $(U, x^i)_g$ 使得

$$|g| = 1 + O(|x|^5), \quad R(P) = O(|x|^2), \quad -\Delta R(P) = \frac{1}{6}|W(P)|^2.$$

在构造试验函数时，一个要素就是 $\mathbb{R}^n$ 上最佳 Sobolev 不等式的极值函数族. 它们是

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{(n-2)/2}}, \quad \varepsilon > 0.$$

在 P 点的共形法坐标系 $\{U, x^i\}_g$ 中，设 $B_{2\delta} \subset U$ 是以 P 为中心 2δ 为半径的球，取一光滑截断函数 η，$0 \le \eta \le 1$，使得

$$\eta(x) = 1, \ x \in B_\delta; \quad \eta(x) = 0, \ x \in M \setminus B_{2\delta}. \tag{7.32}$$

现构造试验函数 u_ε 如下

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\eta(x)}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{(n-2)/2}}. \tag{7.33}$$

我们将应用下列定理完成定理 7.12 的证明.

引理 7.13　在定理 7.12 的条件下，存在常数 $c_n > 0$，使得当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$$Q(u_\varepsilon) = \begin{cases} S\big(1 - c_n|W(P)|^2\varepsilon^4 + o(\varepsilon^4)\big), & n \ge 7, \\ S\big(1 - c_n|W(P)|^2\varepsilon^4|\log\varepsilon| + O(\varepsilon^4)\big), & n = 6. \end{cases} \tag{7.34}$$

因而对充分小的正数 ε 有 $Q(u_\varepsilon) < S$.

证明　引理 7.13 是如下估计的直接推论:

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \begin{cases} \|\nabla_0\psi\|_2^2\,\varepsilon^{2-n} + o(\varepsilon^{6-n}), & n \ge 7, \\ \|\nabla_0\psi\|_2^2\,\varepsilon^{2-n} + O(1), & n = 6. \end{cases} \tag{7.35}$$

$$\|u_\varepsilon\|_N^2 = \|\psi\|_N^2\,\varepsilon^{2-n}\big(1 + o(\varepsilon^4)\big), \quad n \ge 6. \tag{7.36}$$

$$\int Ru_\varepsilon^2 = \begin{cases} -c_n'|W(P)|^2\varepsilon^{6-n}\big(1 + o(1)\big), & n \ge 7, \\ -c_n'|W(P)|^2|\log\varepsilon| + O(1), & n = 6. \end{cases} \tag{7.37}$$

其中 $c_n' > 0$ 是常数，∇_0 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的梯度算子.

(7.35) 的验证. 我们有

$$dV = \sqrt{|g|}\,dx = \big(1+\beta(x)\big)\,dx, \quad \beta(x) = O(|x|^5).$$

因 u_ε 在 B_δ 内径向对称，$|\nabla u_\varepsilon(x)|$ 在 B_δ 外有界，我们有

$$\int_M |\nabla u_\varepsilon|^2 dV = \int_{B_\delta} |\nabla_0 u_\varepsilon|^2 dx + \int_{B_\delta} \beta |\nabla_0 u_\varepsilon|^2 dx + O(1)$$

根据 57 页的 (2.21) 式，我们有

$$\int_{B_\delta} |\nabla_0 u_\varepsilon|^2 dx = \|\nabla_0 \psi\|_2^2\, \varepsilon^{2-n} + O(1). \tag{7.38}$$

当 $n \geq 7$ 时，$|\beta(x)| \leq C|x|^{9/2}$，因而

$$\begin{aligned}\int_{B_\delta} |\beta|\,|\nabla_0 u_\varepsilon|^2 dx &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(n-2)^2|x|^2}{(\varepsilon^2+|x|^2)^n} |x|^{9/2} dx \\ &= C' \varepsilon^{(13-2n)/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^{13/2}}{(1+|x|^2)^n} dx = o(\varepsilon^{6-n}).\end{aligned}$$

故当 $n \geq 7$ 时有 (7.35).

当 $n = 6$ 时，可设 $|\beta(x)| \leq C|x|^5$，因而

$$\begin{aligned}\int_{B_\delta} |\beta|\,|\nabla_0 u_\varepsilon|^2 dx &\leq C \int_{B_\delta} \frac{16|x|^2}{(\varepsilon^2+|x|^2)^6} |x|^5 dx \\ &\leq C' \int_{B_\delta} \frac{dx}{|x|^5} = O(1).\end{aligned}$$

故当 $n = 6$ 时也有 (7.35).

(7.36) 的验证.

$$\int_M |u_\varepsilon|^N dV = \int_{B_\delta} |u_\varepsilon|^N (1+\beta)\, dx + O(1)$$

我们有估计

$$\begin{aligned}\int_{B_\delta} |u_\varepsilon|^N dx &= \int_{B_\delta} \frac{dx}{(\varepsilon^2+|x|^2)^n} + O(1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(\varepsilon^2+|x|^2)^n} + O(1) \\ &= \|\psi\|_N^N \varepsilon^{-n} + O(1).\end{aligned}$$

因 $|\beta(x)| \leq C|x|^5$，所以

$$\begin{aligned}\int_{B_\delta} |u_\varepsilon|^N |\beta| \,\mathrm{d}x &\leq \int_{B_\delta} \frac{C|x|^5 \,\mathrm{d}x}{(\varepsilon^2+|x|^2)^n} + O(1)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{C|x|^5 \,\mathrm{d}x}{(\varepsilon^2+|x|^2)^n} + O(1)\\ &= C_1\varepsilon^{5-n} + O(1)\end{aligned}$$

从而 $\|u_\varepsilon\|_N^2 = \|\psi\|_N^2 \varepsilon^{2-n}\big(1+O(\varepsilon^5)\big)$，更有 (7.36).

(7.37) 的验证. 在 P 点的共形法坐标系 $\{U, x^i\}_g$ 下，因 $R(x) = O(|x|^2)$，R 在 P 点附近有如下 Taylor 展式，

$$R(x) = \frac{1}{2}R_{ij}x^i x^j + O(|x|^3),$$

而且 $\Delta R(P) = R_{ii}$. 如同前文反复所用的手段，我们有

$$\int_M R|u_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_{B_\delta} |u_\varepsilon|^2 R_{ij}x^i x^j \,\mathrm{d}x + \int_{B_\delta} |u_\varepsilon|^2 \gamma \,\mathrm{d}x + O(1). \tag{7.39}$$

其中 $\gamma(x) = O(|x|^3)$. 因 $|u_\varepsilon|^2$ 在 B_δ 中是径向对称函数，利用对称性不难看出

$$\int_{B_\delta} |u_\varepsilon|^2 x^i x^j \,\mathrm{d}x = 0, \quad 若\ i \neq j,$$

$$\int_{B_\delta} |u_\varepsilon|^2 (x^i)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_{B_\delta} |u_\varepsilon|^2 |x|^2 \,\mathrm{d}x,$$

于是

$$\int_{B_\delta} |u_\varepsilon|^2 R_{ij}x^i x^j \,\mathrm{d}x = \frac{\Delta R(P)}{n}\int_{B_\delta} |u_\varepsilon|^2 |x|^2 \,\mathrm{d}x.$$

因 $\Delta R(P) = (-1/6)|W(P)|^2$，由上式及 (7.39) 得

$$\int_M R|u_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}V = -\frac{|W(P)|^2}{12n} I_1 + I_2 + O(1), \tag{7.40}$$

其中

$$I_1 = \int_{B_\delta} |u_\varepsilon|^2 |x|^2 \,\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_{B_\delta} |u_\varepsilon|^2 |\gamma| \,\mathrm{d}x.$$

以下分 $n \geq 7$ 和 $n = 6$ 两种情况分别给出 I_1 和 I_2 的估计.

情形一，当 $n \geq 7$ 时，我们有

$$I_1 = \int_{B_\delta} \frac{|x|^2 \mathrm{d}x}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{n-2}} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2 \mathrm{d}x}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{n-2}} + O(1)$$

故

$$I_1 = \varepsilon^{6-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2 \mathrm{d}x}{(1 + |x|^2)^{n-2}} + O(1) \triangleq K_n \varepsilon^{6-n} + O(1). \tag{7.41}$$

接下来估计 I_2. 当 $n \geq 7$ 时，可设 $|\gamma(x)| \leq C|x|^{5/2}$，这时

$$I_2 \leq \int_{B_\delta} \frac{C|x|^{5/2} \mathrm{d}x}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{n-2}} = O(\varepsilon^{(1/2)+(6-n)}) \tag{7.42}$$

故当 $n \geq 7$ 时，由 (7.40)—(7.42) 得估计 (7.37)，且 $c_n' = K_n/(12n)$.

情形二，当 $n = 6$ 时，我们有

$$I_1 = \int_{B_\delta} \frac{|x|^2 \mathrm{d}x}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^4} = \int_0^\delta \frac{\omega_5 r^7 \mathrm{d}r}{(\varepsilon^2 + r^2)^4} = \frac{1}{2}\omega_5 |\log \varepsilon| + O(1). \tag{7.41$'$}$$

在估计 I_2 时，我们设 $|\gamma(x)| \leq C|x|^3$. 因 $n = 6$，我们有

$$I_2 \leq \int_{B_\delta} \frac{C|x|^3 \mathrm{d}x}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^4} \leq \int_{B_\delta} \frac{C \mathrm{d}x}{|x|^5} = O(1) \tag{7.42$'$}$$

由 (7.40) 及 (7.41)$'$、(7.42)$'$ 得估计 (7.37)，且 $c_6' = \omega_5/144$. □

第三节 GREEN 函数及其渐近展开

在共形法坐标系下，共形 Laplace 算子 的 Green 函数及其渐近展开，在 Yamabe 问题的解决中具有特殊重要性.

Yamabe 问题最重要的情形是 □ 强制的情形，在本节的讨论中，我们始终假定共形 Laplace 算子 □ 强制，或者等价地，Yamabe 不变量 $\lambda(M) > 0$.

一、Green 函数

我们知道，在 $\mathbb{R}^n$ 上，Laplace 算子 Δ_0 具有一个 Green 函数 $c_n r^{2-n}$，其中 $c_n = [(n-2)\omega_{n-1}]^{-1}$，在分布意义下满足

$$-\Delta_0 c_n r^{2-n} = \delta_0.$$

其中 ω_{n-1} 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的体积. 对于紧致流形 (M,g) 上的强制算子 $(-\Delta+h)$，也有类似的结论.

命题 7.14 设 (M,g) 是 $n \geq 3$ 维紧致 Riemann 流形，h 是 M 上的光滑函数，算子 $(-\Delta+h)$ 强制，则对于每个点 $P \in M$，存在唯一函数 $G_P \in C^\infty(M \setminus \{P\})$ 满足

$$(-\Delta+h)G_P = \delta_P, \quad G_P > 0,$$

其中 δ_P 是 Dirac 测度. 在 P 点的法坐标系中 $G_P(Q) = c_n r^{2-n}\big(1+o(1)\big)$. G_P 叫做算子 $(-\Delta+h)$ 在 P 点的 Green 函数.

二、Green 函数的渐近展开

在共形法坐标系下，$\Box = -\Delta + \kappa$ 的 Green 函数 G_P 的正则部分在奇点 P 具有良好的表现. 以下记 $G(x) = (n-2)\omega_{n-1}G_P(x)$，仍称作 Green 函数.

定理 7.15 设 (M,g) 是 $n = 3, 4, 5$ 维紧致 Riemann 流形，或 $n \geq 3$ 维共形平坦的紧 Riemann 流形，共形 Laplace 算子 $\Box$ 强制. 那么，在共形法坐标系下，$\Box$ 在 P 点的 Green 函数 G 有如下渐近展式:

$$G = r^{2-n} + A + \alpha(x), \tag{7.43}$$

其中 A 为常数，$\alpha(x) = O(r)$. 当 $n = 3$ 或 M 局部共形平坦时，$\alpha \in C^{2,\beta}$; 当 $n = 4$ 时 $\alpha = r^{-2}(p_4 + q_4 \log r) + \alpha_0$; 当 $n = 5$ 时 $\alpha = r^{-3}(p_4 + p_5) + \alpha_0$，这里 p_k 表示 k 次齐次多项式，$\alpha_0 \in C^{2,\beta}$，$\beta \in (0,1)$.

注记 7.4 根据下一目将要介绍的广义正质量定理，(7.43) 式中的常数 $A \geq 0$. $A = 0$ 当且仅当 M 共形等价于标准的单位球面 $\mathbb{S}^n$（见定理 7.20）. 论证这一结论是下一目的主题.

定理 7.15 的证明 设 $\{x^i\}$ 是 P 点的共形法坐标系. 由于 $r = |x|$ 仅是 Lipchitz 函数，取非负径向光滑函数 h 使得在 $B_\delta = \{x : |x| < \delta\}$ 内 $h(r) = 1$，

在 $B_{2\delta}$ 外 $h(r)=0$. 这里 2δ 是 P 点的射影半径. 令 $H=h(r)r^{2-n}$. 因 H 径向对称，我们有 (见 p.175 页 (6.5) 式)

$$\begin{aligned}\Delta H &= \Delta_0 H + H'(r)\partial_r \log\sqrt{|g|}\\ &= h\Delta_0 r^{2-n}+\theta, \quad \theta\in\mathscr{C}_{\nu'}.\end{aligned}$$

ν' 可取得充分大，只要 $|g|=1+O()r^{\nu})$ 中 ν 取得充分大. 这里及以下 $\mathscr{C}_k$ 表示 k 阶以下导数均在 P 点为零的全体 C^k 函数，$\mathscr{C}_{k,\beta}$ 表示直到 k 阶导数均为零的全体 $C^{k,\beta}$ 函数.

因为在分布意义下 $-c_n h\Delta_0 r^{2-n}=\delta_P$，于是寻找 $\square$ 的形如 $G=H+\Phi$ 的 Green 函数，就归结为求解方程

$$\square\Phi=\theta-\kappa H. \tag{7.44}$$

根据定理 7.9，$S=O(r^2)$，因此 $\kappa H=O(r^{4-n})$. 故一般来说，方程 (7.44) 中的 κH 在 P 点含有奇性. 分两种情况讨论.

(α) *情形 $n=3$ 或 M 局部共形平坦.*

当 $n=3$ 时，$\kappa H=O(r)$，所以 $SH\in C^{1-0}$，根据 Schauder 估计，方程 (7.44) 有唯一解 $\Phi\in C^{2,\beta}$，Green 函数 $G=H+\Phi$ 具有定理所要求的展式.

当 M 在 P 点附近局部共形平坦时，可取共形度量 g 使得它与欧氏度量相同，即 $g_{ij}=\delta_{ij}$，在 P 点附近恒有 $\kappa=0$. 方程 (7.44) 的右端属于 C^∞，因而 Φ 属于 C^∞.

(β) *情形 $n=4$ 或 5.*

寻找方程 (7.44) 的一个具体形式的渐近解 Ψ，使得 $\square\Psi+\kappa H\in C^\beta, \beta>0$. 这样方程 (7.44) 转化为

$$\square(\Phi-\Psi)=\theta_1, \quad \theta_1\in C^\beta.$$

根据椭圆方程的 Schauder 估计，上述方程有唯一解 $\Phi-\Psi\in C^{2,\beta}$. Green 函数表达为 $G=H+\Psi+(\Phi-\Psi)$，那么 G 在 P 点的渐近性质就体现在 Ψ 上.

试探方程 (7.44) 形如 $r^{2-n}\psi$ 的渐近解，使得在 P 点附近有 $\square(r^{2-n}\psi)+r^{2-n}\kappa\in\mathscr{C}_\beta$，等价地

$$r^n\square(r^{2-n}\psi)+r^2\kappa\in\mathscr{C}_{n,\beta}. \tag{7.45}$$

为计算方便，将上式转化为 $\mathbb{R}^n$ 上的表达式. 记 $K\psi=(\Delta-\Delta_0)\psi$，则

$$K\psi=\partial_i\big((g^{ij}-\delta^{ij})\partial_j\psi\big), \tag{7.46}$$

再记 $L\psi = -r^2\Delta_0\psi + 2(n-2)x^l\partial_l\psi$，再注意 $\partial_r \log\sqrt{g} = O(r^N)$，则 (7.45) 式可表示为

$$L\psi + r^2\big(\kappa + \kappa\psi + K\psi\big) \in \mathscr{C}_{n,\beta}. \tag{7.45'}$$

若 $n=5$，注意到 $\kappa = O(r^2)$，则取 $\psi = \psi_4 + \psi_5$，$\psi_k \in \mathscr{P}_k$ 是 k 次齐次多项式. 应用 Taylor 展式，将属于 $\mathscr{C}_6$ 的项甩到右边，则上式等价于

$$L\psi + b_4 + b_5 \in \mathscr{C}_6, \quad b_k \in \mathscr{P}_k, \tag{7.47}$$

这里我们用到了如下事实

$$K\psi = \partial_i\big((g^{ij} - \delta^{ij})\partial_j\psi\big) \in \mathscr{C}_k, \quad \forall\, \psi \in \mathscr{P}_k;$$

$$r^2 S = b_4 + b_5 + \mathscr{C}_6, \text{ 其中 } p_k \in \mathscr{P}_k;$$

我们注意，当限制于 $\mathscr{P}_k$ 之上，则 $L = -r^2\Delta_0 + 2k(n-2)$. 现在 $n=5$，取 $\psi_4 \in \mathscr{P}_4$，$\psi_5 \in \mathscr{P}_5$ 分别使

$$L\psi_4 = (-\Delta_0 + 24)\psi_4 = -b_4, \quad \psi_4 \in \mathscr{P}_4,$$

$$L\psi_5 = (-\Delta_0 + 30)\psi_5 = -b_5, \quad \psi_4 \in \mathscr{P}_4.$$

这总是可以实现的，因为根据引理 7.11，对于 $n=5$ 来说，$r^2\Delta_0 + 24$ 及 $r^2\Delta_0 + 30$ 分别在 $\mathscr{P}_4$ 及 $\mathscr{P}_5$ 上可逆. 因而 $\psi = \psi_4 + \psi_5$ 可使 (7.45) 成立.

当 $n=4$ 时，在 $\mathscr{P}_4$ 上，$L = -r^2\Delta_0 + 16$，根据引理 7.11，L 不可逆. 我们不能指望有 $L\psi_4 = -b_4$ 成立. 但因 L 在有限维空间 $\mathscr{P}_4$ 上是自伴的，我们有 $\mathscr{P}_4 = \mathrm{im}L \oplus \ker L$. 将 b_4 分解为 $-b_4 = Lp_4 + q_4$，其中 $Lq_4 = 0$. 尝试 $\psi = p_4 + q_4 \log r$，其中 $p_4, q_4 \in \mathscr{P}_4$.

直接计算得

$$L(q_4 \log r) = -6q_4 + (Lq_4)\log r. \tag{7.48}$$

从而知方程 $L\psi = -b_4$ 有解 $\psi = p_4 - (1/6)q_4 \log r$. 对于这样的 ψ，容易验证

$$r^2 S - b_4 \in \mathscr{C}_{4,\beta}, \qquad r^2 S\psi \in \mathscr{C}_{4,\beta},$$

$$r^2 K\psi = r^2\partial_i\big((g^{ij} - \delta^{ij})\partial_j\psi\big) \in \mathscr{C}_{4,\beta},$$

结合 $L\psi + b_4 = 0$ 便得

$$L\psi + r^2\big(\kappa + \kappa\psi + K\psi\big) \in \mathscr{C}_{4,\beta}. \tag{7.45''}$$

最后，由于在 $M - \{P\}$ 上，$\Box G = 0$，根据极大值原理 $G > 0$，从而也证明了 Green 函数的存在性. $\Box$

三、渐近平坦流形

本目旨在了解广义正质量定理如何与 Green 函数的渐近展式发生联系.

1. 球极投影.

设 (M_n, g) 是光滑紧致 Rieman 流形，Yamabe 共形不变量 $\lambda(M) > 0$. 给定 $P \in M$，设 G 是 P 点的 Green 函数. 在 $\hat{M} = M \setminus \{P\}$ 上定义度量 $\hat{g} = G^{4/(n-2)}g$，我们将 $(\hat{M}, \hat{g})$ 及其自然映射 $\pi : M \setminus \{P\} \to \hat{M}$ 一起称作 (M, g) 的球极投影.

球极投影流形 $(\hat{M}, \hat{g})$ 的数量曲率 $\hat{R} = 0$，因为 $\hat{\kappa} = G^{-2n/(n-2)}\Box G = 0$. 球极投影流形上还有一个特别的几何结构，称作渐近平坦.

记号：我们说 $f = O'(\rho^k)$，如果 $f = O(\rho^k)$ 且 $\nabla f = O(\rho^{k-1})$；若进一步还有 $\nabla^2 f = O(\rho^{k-2})$，则说 $f = O''(\rho^k)$.

定义 7.1 设 (N_n, g) 是光滑 Rieman 流形，称 (N, g) 为 τ 阶渐近平坦，如果 $N = N_0 \cup N_\infty$，其中 N_0 紧致，N_∞ 微分同胚于 $\mathbb{R}^n$ 去掉一个 n 维球体 B_R，且在 N_∞ 上存在渐近坐标系 $\{y^i\}$，即在坐标系 $\{y^i\}$ 下，随着 $\rho = |y| \to \infty$，度量矩阵满足 $g_{ij} = \delta_{ij} + O''(|y|^{-\tau})$.

渐近平坦的概念，表面看与渐近坐标的选择有关，但实际上渐近平坦结构只取决于流形的度量（见 Lee-Parker [129]）.

回到 (M, g) 的球极投影 $(\hat{M}, \hat{g})$. 设 $\{x^i\}_g$ 是 P 点的共形法坐标系，定义共形反演法坐标：$y^i = r^{-2}x^i$，$r = |x|$. 记 $\rho = |y|$，我们有

$$\partial/\partial y^i = \rho^{-2}(\delta_{ij} - 2\rho^{-2}y^i y^j)\partial/\partial x^j,$$

若记 $\gamma = r^{n-2}G$，那么在反演坐标系 $\{y^i\}$ 下，度量 $\hat{g}$ 的分量

$$\begin{aligned}\hat{g}_{ij}(y) &= \gamma^{4/(n-2)}\rho^4 g(\partial/\partial y^i, \partial/\partial y^j)\\ &= \gamma^{4/(n-2)}(\delta_{ik} - 2\rho^{-2}y^i y^k)\cdot(\delta_{jl} - 2\rho^{-2}y^j y^l)g_{kl}(\rho^{-2}y).\end{aligned}$$

因此
$$\hat{g}_{ij}(y) = \gamma^{4/(n-2)}(\delta_{ij} + O''(\rho^{-2})).$$

特别，如果 M 在 P 点局部共形平坦，则 $\hat{g}_{ij}(y) = \delta_{ij}$. 因此，在 $n = 3, 4, 5$ 或 M 局部共形平坦的情形，由 G 的渐近展式，得到如下 γ 的渐近展式

$$\gamma(y) = 1 + A\rho^{2-n} + O''(\rho^{1-n}). \tag{7.49}$$

在共形反演法坐标系下，$\hat{g}(y)$ 有如下渐近展式

$$\hat{g}_{ij}(y)=\Big(1+\frac{4}{n-2}A\rho^{2-n}\Big)\delta_{ij}+O''(\rho^{-k}) \tag{7.50}$$

其中 $k=(n-1)$ 如果 M 局部共形平坦，其余情形 $\kappa=\min\{n-1,2\}$. 这样，我们实际上证明了如下

定理 7.16 当 $n=3$ 时度量 $\hat{g}$ 一阶渐近平坦，当 $n=4,5$ 时度量 $\hat{g}$ 二阶渐近平坦，当 M 在 P 点局部共形平坦时，度量 $\hat{g}$ 为 $(n-2)$ 阶渐近平坦.

2. **广义正质量定理.**

广义相对论模拟现实世界为一个赋 Lorentz 度量 g 的四维时空流形 X. 其中度规张量 g 扮演两个角色，一个是动力学的，度规决定自由落体的轨迹，即测地线. 其次，度规张量满足所谓 Einstein 方程，根据这个方程，物质的分布直接决定了引力场. 在局部坐标系下，Einstein 方程写作

$$R_{ij}-\frac{1}{2}Rg_{ij}=T_{ij}$$

其中，度规张量充当传统引力理论中引力势的角色，能动量张量 T_{ij} 类似于传统力学中的质量密度.

Einstein 方程最著名的解是 Schwardchild 度量，它描述由一个具有质量 m 的静态点粒子 (黑洞) 产生的引力常它是 $\mathbb{R}^4$ 的一个奇异 Lorentz 度量，当时间固定为常时，对应的三维超平面是一个一阶渐近平坦的三维流形. 在适当的渐近坐标系下，Schwardchild 度量具有如下渐近展式

$$g_{ij}=\big(1+m\rho^{-1}\big)\delta_{ij}+O(\rho^{-2}).$$

Einstein 方程更现实的解应当模拟引力系，比如双星系统. 物理上，人们预计，从遥远看，它的引力场应当与点粒子所产生的相似. 因而，时空 (X,g) 应当是渐近 Schwardchild 的，类空超曲面 (N,g) 应当是渐近平坦 Riemann 流形. 有鉴于此，Einstein 方程的解一般都在渐近平坦流形上讨论.

1960 年，Arnowitt, Deser 和 Misner 在系列文献 [24–26] 中，对孤立引力系统做了详尽研究. 他们首先选择一个类空三维超曲面作为起始曲面，而把 Einstein 方程写成此起始曲面的演化方程 (这与后来 R. Hamilton 引进的 Ricci 流有类似之处). 分部积分后，他们发现了一个守恒量，在渐近坐标系 $\{y^i\}$ 下

表达为

$$m(g)=\frac{1}{\omega}\lim_{R\to\infty}\int_{S_R}\mu\rfloor\,\mathrm{d}y, \tag{7.51}$$

其中 S_R 是 Riemmann 流形 (N,g) 上半径为 R 的球面，ω 是 $\mathbb{R}^3$（以后讨论广义正质量定理时为 $\mathbb{R}^n$）上标准单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的面积，而 μ 是 N_∞ 上的所谓质量密度向量常其定义为

$$\mu=(\partial_i g_{ij}-\partial_j g_{ii})\partial_j.$$

这守恒量在 Schwarzschild 时空，$m(g)=m$. 于是，他们得出结论，守恒量 $m(g)$ 就是孤立系统的总质量. 公式 (7.51) 正是 ADM 所给质量的定义. 注意，这个定义不依赖于坐标系的选择.

Arnowitt, Deser 与 Misner 进一步猜想，时空中类空超曲面上所测质量是非负的，而且只当时空为“空”时质量才为零. 对于任意物理上的时空，其度规必须满足 Einstein 方程，方程中的能动量张量具有物理的合理性，因此，现实物理模型中的能动量张量须满足某种正值性条件，叫做 dominant energy condition. 根据 Einstein 方程，这变为 Ricci 曲率的正值性条件，特别，对于时间分离的时空 $X=N_3\times R$，这相当于要求 N 的数量曲率 R（此时代表局部质量密度）非负. 因此，ADM 正质量猜想的情形之一便是：

正质量猜想 设 (N,g) 是渐近平坦的三维 Riemann 流形，如果其数量曲率 R_g 非负，那么由 (7.51) 式定义的 ADM 质量 $m(g)$ 非负. $m(g)=0$ 当且仅当 (N,g) 等距同构于标准的欧氏空间 $\mathbb{R}^3$.

事实上，Arnowitt, Deser 和 Misner 发现 $m(g)$ 只是代表总能动量的守恒向量的第一个分量. 假如系统从远距离看行为像相对论性的点粒子，则这个能动量向量就应该是类时的. 他们猜想的一般形式叫正能量猜想. 这个一般性猜想基本上等价于上述正质量猜想 ([180]).

在四维黎曼流形上，(7.51) 的积分也出现在物理中. Stephen Hawking 在其重力量子化的欧氏作法中建议用渐近平坦的四维黎曼流形取代时空流形，然后量子化它的度量. 考虑作为渐进平坦度量 g 的泛函

$$B(g)=A(g)+m(g),$$

其中 $A(g)$ 是 Einstein-Hilbert 作用量——纯量曲率的积分. $B(g)$ 的临界点满足真空时的爱因斯坦方程. Gibbons-Hawking-Perry [105] 经过分析这个作用量 $B(g)$，认为，假如对零数量曲率的 g 有 $B(g)\geq 0$，则有可能导出一个合理的好行为的量子引力理论. 这使他们有如下猜想:

正作用量猜想 假设 (N,g) 是一个渐近平坦的四维 Riemann 流形，其数量曲率为零，则 $B(g)\geq 0$; 又等号成立当且仅当 (N,g) 等距同构于带标准欧氏度量的 $\mathbb{R}^4$.

正作用量猜想结果是后来广义正质量猜想四维版本的一个简单结论.

正质量猜想自问世经过 20 多年的发展，期间有许多各种版本的正质量定理，1979 年，R. Schoen 和丘成桐在他们的系列文章 [178–181] 给出所有这些猜想完整而严格的证明. 之后不久，Edward Witten 对正能量定理给了一个简单的证明(见 Witten [211] 及 Parker-Taubes [164]).

尽管正质量定理源于广义相对论，但它表达的完全是关于三维渐近平坦 Riemann 流形中的事实. 这些猜想或定理，推广到 $n\geq 3$ 维 Riemann 流形就称之为广义正质量猜想或定理.

下面的定理 7.17，是广义正质量定理的一种 (见 Schoen [176] 及丘-孙 [237]). 我们说 $f=O''(\rho^k)$，如果 $f=O(\rho^k)$，$\nabla f=O(\rho^{k-1})$，以及 $\nabla^2 f=O(\rho^{k-2})$.

定理 7.17 (广义正质量定理 A) 设 (N,g) 是 $(n-2)$ 阶的渐近平坦流形，且在渐近坐标系中有

$$g_{ij}=\left(1+\bar{A}\rho^{2-n}\right)\delta_{ij}+h_{ij},\quad h_{ij}=O''(\rho^{1-n}),$$

其中 $\bar{A}$ 为常数，$\rho=|y|$. 如果数量曲率 $R\geq 0$，$R\in L^1(N,g)$，则 $\bar{A}\geq 0$，$\bar{A}=0$ 当且仅当 (N,g) 等距同构于欧氏空间 $\mathbb{R}^n$.

这个定理与 Green 函数的渐近展开很密切，但 $n=5$ 时，紧致 Riemann 流形 (M,g) 仅为二阶渐近平坦. Lee-Parker [129] 通过仔细考察 Schoen-Yau [178–181] 及 Witten [211] 等正质量定理的证明，给出一个一般形式的广义正质量定理，即定理 7.19.

为便于叙述 Lee-Parker 定理, 我们需要加权 Hölder 空间的概念 (见P.187), 并用 $g\in\mathscr{M}_\tau$ 表示 N 上满足下列条件的 Riemann 度量的集合

$$g\in\mathscr{M}_\tau\iff g_{ij}-\delta_{ij}\in C^{1,\alpha}_{-\tau}(N_\infty)$$

其中 $0<\alpha<1$.

引理 7.18 (Lee-Parker [129]) 设 (N,g) 是 $n\geq 3$ 维渐近平坦 Riemann 流形，并且对于某个 $\tau>(n-2)/2$，度量 $g\in\mathscr{M}_\tau$，那么质量 $m(g)$ 只依赖于度量 g 而不依赖于渐近坐标的选择.

定理 7.19 (广义正质量定理 B) 设 (N,g) 是 $n \geq 3$ 维渐近平坦 Riemann 流形，并且对于某个 $\tau > (n-2)/2$，度量 $g \in \mathscr{M}_\tau$. 如果 (N,g) 的数量曲率 R 非负，那么它的质量 $m(g)$ 非负，$m(g) = 0$ 若且唯若 (N,g) 等距同构于具标准度量的欧氏空间 $\mathbb{R}^n$.

证明 见 Lee-Parker [129]，也可参考原文 Schoen-Yau [178–181] 给出. □

经过这些准备，现在可以给出与 Yamabe 问题直接相关的一个定理，也可认为是正质量定理的另一个版本. 设 (M_n, g) 是紧 Riemann 流形，取 $\{x^i\}_g$ 为某点 $P \in M$ 的共形法坐标系，设 $(\widehat{M}, \hat{g})$ 是 (M,g) 在极点 P 处的球极投影，共形反演法坐标 $z^i = r^{-2}x^i$，$\rho = |z|$. 在这些记法下，我们有

定理 7.20 设 $n = 3, 4, 5$ 或 $n \geq 3$ 且 (M,g) 共形平坦，如果数量曲率 R_g 非负，则 $(\widehat{M}, \hat{g})$ 的质量 $m(\hat{g}) = 4(n-1)A \geq 0$. $A = 0$ 当且仅当 (M,g) 等距同构于标准球面 $\mathbb{S}^n$. 这里 A 为 Green 展式 (7.43) 中的常数.

证明 在定理的条件下，$R_{\hat{g}} \equiv 0$，这是因为，$\hat{\kappa} = G^{-2n/(n-2)}\Box G = 0$. 再由定理 7.16 知，存在某个 $\tau > (n-2)/2$，使得 $g \in \mathscr{M}_\tau$. 因此质量 $m(\hat{g})$ 有定义 (这一点也可通过以下论证得出).

在给出 $m(\hat{g})$ 的表达式之前，我们注意，如果在无穷远 $\hat{g}$ 足够平坦，比如说 $(n-2)$ 阶渐近平坦，则由 $\hat{g}$ 的渐近展式

$$\hat{g}_{ij}(y) = \left(1 + \frac{4}{n-2}A\rho^{2-n}\right)\delta_{ij} + O''(\rho^{1-\tau}) \tag{7.50}$$

以及质量的定义

$$m(\hat{g}) = \frac{1}{\omega}\lim_{\rho\to\infty}\int_{S_\rho}(\partial_i\hat{g}_{ij} - \partial_j\hat{g}_{ii})\partial_j \lrcorner \, \mathrm{d}y, \tag{7.51}$$

直接验证可得 $m(\hat{g}) = 4(n-1)A$. 对于定理的几乎所有情形，$\tau = n-2$ 都成立，只在 $n = 5$ 时 $\tau = 2$. 这一不足，主要是 $\hat{g}_{ij}$ 不具有良好的渐近性质，克服困难的思路是，将质量定义 (7.50) 式中的张量 μ 转化为用 γ 表达，因为根据 (7.49) 式，γ 有良好的渐近性质. 在 S_ρ 上，

$$\partial_j \lrcorner \, \mathrm{d}y = \rho^{-1}y^j \, \mathrm{d}\omega_\rho = \rho^{-2}y^j y^k \partial_k \lrcorner \, \mathrm{d}y,$$

因而质量公式成为

$$m(\hat{g}) = \frac{1}{\omega}\lim_{\rho\to\infty}\int_{S_\rho}(\rho^{-2}y^j y^k \partial_i\hat{g}_{ij} - \partial_k\hat{g}_{ii})\partial_k \lrcorner \, \mathrm{d}y.$$

因 $\partial_\rho = \rho^{-1}y^i\partial_i$，于是 $\hat{g}_{\rho\rho} \triangleq \hat{g}(\partial_\rho, \partial_\rho) = \rho^{-2}y^jy^k\hat{g}_{kj}$，即

$$\rho^2\hat{g}_{\rho\rho} = y^jy^k\hat{g}_{kj}.$$

上式两边用 ∂_ρ 求微分，并在右边所得结果中继续应用上述关系，我们有

$$\partial_\rho\hat{g}_{\rho\rho} = \rho^{-3}y^iy^jy^k\partial_i\hat{g}_{kj}. \tag{7.52}$$

令 $\eta \triangleq y^jy^k\hat{g}_{kj}\partial_i\lrcorner\partial_k\lrcorner\mathrm{d}y$，则这个 $(n-2)$ 次外微分式满足

$$\mathrm{d}\eta = \big(y^jy^k\partial_i\hat{g}_{ij} - y^jy^i\partial_i\hat{g}_{kj} + y^k\hat{g}_{ii} - ny^j\hat{g}_{kj}\big)\partial_k\lrcorner\mathrm{d}y.$$

由 Poincaré 恒等式 $\mathrm{d}^2\eta = 0$，在 B_ρ 上应用 Stokes 公式得

$$\int_{S_\rho}\big(y^jy^k\partial_i\hat{g}_{ij} - y^jy^i\partial_i\hat{g}_{kj} + y^k\hat{g}_{ii} - ny^j\hat{g}_{kj}\big)\partial_k\lrcorner\mathrm{d}y = 0.$$

由上式及 (7.52) 式，质量公式变为

$$m(\hat{g}) = \frac{1}{\omega}\lim_{\rho\to\infty}\int_{S_\rho}\partial_\rho\big(\hat{g}_{\rho\rho} - \hat{g}_{ii}\big) + \rho^{-1}\big(n\hat{g}_{\rho\rho} - \hat{g}_{ii}\big)\,\mathrm{d}\omega_\rho. \tag{7.53}$$

在共形反演法坐标系下，$\hat{g}_{\rho\rho} = \gamma^{4/(n-2)}$，$|\hat{g}| = \gamma^{4n/(n-2)} = 1 + O(\rho^{2-n})$. 因而

$$n\partial_\rho\hat{g}_{\rho\rho} = \gamma^{4/(n-2)}\partial_\rho\log|\hat{g}|,$$

由于 $\hat{g} \in \mathscr{M}_\tau$，我们有 $\log|\hat{g}| = \log\hat{g}_{ii} + O(\rho^{-2\tau})$，$\partial_\rho\hat{g}_{ii} = O'(\rho^{-\tau-1})$，于是

$$n\partial_\rho\hat{g}_{\rho\rho} = \partial_\rho\hat{g}_{ii} + O(\rho^{-2\tau-1}).$$

两边沿径向从 ρ 到无穷远积分，并注意在无穷远处 $n\hat{g}_{\rho\rho} = n = \hat{g}_{ii}$，得 $n\hat{g}_{\rho\rho} = \hat{g}_{ii} + O(\rho^{-2\tau})$. 又 $\partial_\rho\hat{g}_{\rho\rho} = \frac{4}{n-2}\partial_\rho\gamma + O(\rho^{-2\tau-1})$，这样 (7.53) 变为

$$m(\hat{g}) = \frac{4(1-n)}{(n-2)\omega}\lim_{\rho\to\infty}\int_{S_\rho}\partial_\rho\gamma\,\mathrm{d}\,\omega_\rho.$$

根据 (7.49)，$\gamma(y) = 1 + A\rho^{2-n} + O''(\rho^{1-n})$，求得 $m(\hat{g}) = 4(n-1)A$.

最后，根据广义正质量定理 B，$A \geq 0$，且 $A = 0$ 当且仅当 $(\hat{M}, \hat{g})$ 等距同构于标准欧氏空间 $\mathbb{R}^n$，即 (M, g) 等距同构于标准的 n 维球面 $\mathbb{S}^n$. □

四、Schoen 的定理

现在我们终于到了最后解决 Yamabe 问题的阶段. 考虑 Yamabe 问题中未被 Aubin 定理涵盖的两种情形：情形一，$n \geq 6$ 且 (M,g) 局部共形平坦；情形二，$3 \leq n \leq 5$.

定理 7.21 (Schoen [176]) 设 n 维 Riemann 流形 (M,g) 不共形等价于标准单位球面 $(\mathbb{S}^n, g_0)$，并且满足下列两条件之一，

(i) $n \geq 3$ 且 (M,g) 处处局部共形平坦；或者

(ii) $3 \leq n \leq 5$.

则 $\lambda(M) < \lambda(\mathbb{S}^n)$，因而 Yamabe 泛函的最小值 $\lambda(M)$ 可被某个严格正的光滑函数取到，而 Yamabe 问题在此情形可解.

为证定理 7.21，根据定理 7.3 及其注记，我们只须寻找一个试验函数 $\varphi \in H^1(M)$，使得 $Q(\varphi) < \lambda(\mathbb{S}^n)$. 我们假设 $\lambda(M) > 0$，即 $\square$ 强制，否则 $\lambda(M) \leq 0 < \lambda(\mathbb{S}^n)$，问题已经解决. 在构造试验函数时，第一个要素仍是最佳 Sobolev 不等式的极值函数，我们取

$$\phi_\varepsilon(x) = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + |x|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}},$$

则 $S\|\phi_\varepsilon\|_N^2 = \|\nabla \phi_\varepsilon\|_2^2$. 我们注意 ϕ_ε 满足

$$-\Delta \phi_\varepsilon = n(n-2)\phi_\varepsilon^{N-1} \quad \text{在 } \mathbb{R}^n \text{ 中}. \tag{7.54}$$

由分部积分得 $\|\nabla \phi_\varepsilon\|_2^2 = n(n-2)\|\phi_\varepsilon\|_N^N$，或表达为

$$\|\phi_\varepsilon\|_N^{N-2} = \big(n(n-2)\big)^{-1} S. \tag{7.55}$$

构造试验函数的另一要素是 Green 函数及其渐近展式. 设 $P \in M$，不妨设 $\{U, x^i\}_g$ 是点 P 的共形法坐标系，以 P 为奇点的 Green 函数 $G(x)$ 有如下渐近展式

$$G(x) = |x|^{2-n} + A + \alpha(x), \tag{7.56}$$

其中 $\alpha(x) = O(|x|)$. 在定理 7.21 的条件下，如果 $\square$ 强制，那么根据广义正质量定理，$A > 0$.

Schoen 的试验函数定义为

$$u_\varepsilon(x)=\begin{cases}\phi_\varepsilon(x), & x\in B_\delta,\\ \varepsilon_0\big(G(x)-\eta(x)\alpha(x)\big), & x\in B_{2\delta}-B_\delta\\ \varepsilon_0 G(x), & x\in M-B_{2\delta}.\end{cases}\tag{7.57}$$

其中 $\eta(x)$ 是 (7.32) 定义的截断函数. 取 $\varepsilon_0\ll\delta$ 使得

$$\varepsilon_0\Big(\frac{1}{\delta^{n-2}}+A\Big)=\Big(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\delta^2}\Big)^{\frac{n-2}{2}},\tag{7.58}$$

这一关系保证 u 在 $|x|=\delta$ 处连续, 因此 u 是 M 上的 Lipschitz 函数, 故 $u_\varepsilon\in H^1(M)$. 定义

$$E(u)=\int\big(|\nabla u|^2+aR|u|^2\big)\,\mathrm{d}V,$$

为证定理 7.21, 显然只须证明下列引理.

引理 7.22 在定理 7.21 的条件下, 设共形 Laplace 算子 $\square$ 强制, 则对于由 (7.57) 定义的试验函数 u_ε, 成立

$$E(u_\varepsilon)\le S\|u_\varepsilon\|_N^2-(n-2)\omega_{n-1}A\varepsilon_0^2+c\delta\varepsilon_0^2,\tag{7.59}$$

其中 $A>0$ 是 Green 展式 (7.56) 中的常数, $c>0$ 是与 ε 及 δ 无关的常数.

我们分两种情形证明引理 7.22. 在以下论证过程中, 简记 $u_\varepsilon:=u$.

1. **情形一** (M,g) **局部共形平坦.**

在此情形, 可选取共形度量, 不妨就是 g, 使得在 P 点的法坐标系 $\{x^i\}$ 下, $g_{ij}=\delta_{ij}$. 因此对于适当小的 $\delta>0$, 在 $B_{2\delta}$ 内数量曲率 $R=0$. 我们有

$$\begin{aligned}&\int_{M\backslash B_\delta}\big(|\nabla u|^2+aR|u|^2\big)\,\mathrm{d}V\\ =&\int_{M\backslash B_\delta}\varepsilon_0^2\big(|\nabla G|^2+aRG^2\big)\,\mathrm{d}V+\int_{B_{2\delta}\backslash B_\delta}\varepsilon_0^2\big(|\nabla(\eta\alpha)|^2-2\nabla G\cdot\nabla(\eta\alpha)\big)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由于 $\alpha=O(|x|)$, $\nabla\alpha=O(1)$, 有 $|\nabla(\eta\alpha)|\le C$. 此外, 由 (7.56) 可知, $|\nabla G|=O(|x|^{1-n})$, 上式右端第二个积分 $\le c\delta\varepsilon_0^2$, 故

$$\int_{M\backslash B_\delta}\big(|\nabla u|^2+aR|u|^2\big)\,\mathrm{d}V\le\int_{M\backslash B_\delta}\varepsilon_0^2\big(|\nabla G|^2+aRG^2\big)\,\mathrm{d}V+c\delta\varepsilon_0^2.$$

因 G 在 $M-\{P\}$ 上满足 $-\Delta G+aRG=0$，由分部积分得

$$\int_{M\backslash B_\delta}\left(|\nabla G|^2+aRG^2\right)\mathrm{d}V=-\int_{\partial B_\delta}G(\partial_r G)\,\mathrm{d}s,$$

从而

$$\int_{M\backslash B_\delta}\left(|\nabla u|^2+aR|u|^2\right)\mathrm{d}V\le-\varepsilon_0^2\int_{\partial B_\delta}G(\partial_r G)\,\mathrm{d}s+c\delta\varepsilon_0^2. \tag{7.60}$$

另一方面，在 B_δ 上 $R=0$，故

$$\int_{B_\delta}\left(|\nabla u|^2+aR|u|^2\right)\mathrm{d}V=\int_{B_\delta}|\nabla\phi_\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x.$$

根据 (7.54)，利用分部积分得

$$\int_{B_\delta}|\nabla\phi_\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x=n(n-2)\int_{B_\delta}|\phi_\varepsilon|^N\,\mathrm{d}x+\int_{\partial B_\delta}\phi_\varepsilon(\partial_r\phi_\varepsilon)\,\mathrm{d}s$$

现在对上式右端第一个积分进行估计，利用等式 (7.55)，我们有

$$\begin{aligned}\int_{B_\delta}|\phi_\varepsilon|^N\,\mathrm{d}x&=\left(\int_{B_\delta}|\phi_\varepsilon|^N\right)^{2/n}\left(\int_{B_\delta}|\phi_\varepsilon|^N\right)^{2/N}\\&\le\|\phi_\varepsilon\|_N^{N-2}\|u\|_N^2=(n(n-2))^{-1}S\|u\|_N^2.\end{aligned}$$

所以

$$\int_{B_\delta}\left(|\nabla u|^2+aR|u|^2\right)\mathrm{d}V\le S\|u\|_N^2+\int_{\partial B_\delta}\phi_\varepsilon(\partial_r\phi_\varepsilon)\,\mathrm{d}s \tag{7.61}$$

这样，由 (7.60) 及 (7.61) 得

$$\begin{aligned}E(u)&=\int_M\left(|\nabla u|^2+aRu^2\right)\mathrm{d}V\\&\le S\|u\|_N^2+c\delta\varepsilon_0^2+\int_{\partial B_\delta}\Big(\phi_\varepsilon(\partial_r\phi_\varepsilon)-\varepsilon_0^2G(\partial_r G)\Big)\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{7.62}$$

在 $|x|=\delta$ 处有

$$\varepsilon_0^2G(\partial_r G)=-(n-2)\varepsilon_0^2\Big(\delta^{3-2n}+A\delta^{1-n}+O(\delta^{2-n})\Big),$$

由关系 (7.58) 得

$$\varepsilon_0^2\phi_\varepsilon(\partial_r\phi_\varepsilon) = -(n-2)\varepsilon_0^2\Big(\delta^{3-2n} + 2A\delta^{1-n} + O(\delta^{-1})\Big).$$

因此

$$\int_{\partial B_\delta}\Big(\phi_\varepsilon(\partial_r\phi_\varepsilon) - \varepsilon_0^2 G(\partial_r G)\Big)\,\mathrm{d}s \le -(n-2)\omega_{n-1}A\varepsilon_0^2 + c\delta\varepsilon_0^2,$$

故

$$E(u) \le S\|u\|_N^2 - (n-2)\omega_{n-1}A\varepsilon_0^2 + c\delta\varepsilon_0^2. \tag{7.63}$$

因 (M,g) 不共形等价于 $\mathbb{S}^n$，由定理 7.20，$A>0$，又 δ 可以充分小，(7.63) 说明 $Q(u) < S = \lambda(\mathbb{S}^n)$.

2. 情形二　$3 \le n \le 5$.

我们仍取情形 (α) 的试验函数 u. 但现在 $g_{ij} = \delta_{ij}$ 不再成立. 在 P 的共形法坐标系 $\{x^i\}_g$ 中，

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(r^2), \quad |g| = 1 + O(r^K), \quad R = O(r^2).$$

现在对情形一中的估计加以修正. 我们有

$$\int_{M\setminus B_\delta}\left(|\nabla u|^2 + aR|u|^2\right)\mathrm{d}V = \int_{M\setminus B_\delta}\varepsilon_0^2\Big(|\nabla G|^2 + aRG^2\Big)\,\mathrm{d}V$$

$$+\varepsilon_0^2\int_{B_{2\delta}\setminus B_\delta}\Big(|\nabla(\eta\alpha)|^2 - 2\nabla G\cdot\nabla(\eta\alpha) + aR\big(\eta^2\alpha^2 - 2\eta\alpha G\big)\Big)\,\mathrm{d}V.$$

由于 $\alpha = O(|x|)$，$\nabla\alpha = O(1)$，有 $|\nabla(\eta\alpha)| \le C$，以及 $\mathrm{d}V = (1+O(r^K))\,\mathrm{d}x$，由此易见

$$\int_{M\setminus B_\delta}\left(|\nabla u|^2 + aR|u|^2\right)\mathrm{d}V \le \int_{M\setminus B_\delta}\varepsilon_0^2\left(|\nabla G|^2 + aRG^2\right)\mathrm{d}V + c\delta\varepsilon_0^2. \tag{7.64}$$

记 $\mathrm{d}\omega$ 为 ∂B_δ 上由度量 g 诱导的面积元素，$\mathrm{d}s$ 为 ∂B_δ 上的欧氏面积元素，则 $\mathrm{d}\omega = \sqrt{|g|}\,\mathrm{d}s$，此外 ∂B_δ 的单位外法向量为 ∂_r. 因 G 在 $M-\{P\}$ 上满足 $-\Delta G + aRG = 0$，由分部积分得

$$\int_{M\setminus B_\delta}\left(|\nabla G|^2 + aRG^2\right)\mathrm{d}V = -\int_{\partial B_\delta} G(\partial_r G)\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}s,$$

取 K 充分大，则由 (7.64) 得

$$\int_{M\setminus B_\delta}\left(|\nabla u|^2+aR|u|^2\right)\mathrm{d}V\le -\int_{\partial B_\delta}\varepsilon_0^2 G(\partial_r G)\,\mathrm{d}s+c\delta\varepsilon_0^2. \tag{7.65}$$

这个估计与 (7.60) 相同. 其次，利用 $R=O(r^2)$ 可得

$$\int_{B_\delta} aRu^2\,\mathrm{d}V=\int_{B_\delta} aR\phi_\varepsilon^2\,\mathrm{d}x+O(\delta^{6-n}\varepsilon_0^2).$$

于是对于 K 充分大，

$$\int_{B_\delta}\left(|\nabla u|^2+aR|u|^2\right)\mathrm{d}V\le\int_{B_\delta}|\nabla\phi_\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x+c\delta\varepsilon_0^2 \tag{7.66}$$

类似于 (7.61) 的推导，我们有

$$\int_{B_\delta}\left(|\nabla u|^2+aR|u|^2\right)\mathrm{d}V\le S\|u\|_N^2+\int_{\partial B_\delta}\phi_\varepsilon(\partial_r\phi_\varepsilon)\,\mathrm{d}s \tag{7.67}$$

由 (7.66) 及 (7.67) 得

$$\begin{aligned}E(u)&\triangleq\int_M\left(|\nabla u|^2+aRu^2\right)\mathrm{d}V\\&\le S\|u\|_N^2+c\delta\varepsilon_0^2+\int_{\partial B_\delta}\Big(\phi_\varepsilon(\partial_r\phi_\varepsilon)-\varepsilon_0^2G(\partial_rG)\Big)\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{7.68}$$

这与 (7.62) 完全相同，因而与情形一的证明完全相同，对于充分小的 δ 及 $\varepsilon_0\ll\delta$，我们有 $Q(u)<\lambda(\mathbb{S}^n)$.

五、Yamabe 问题的完结

根据 Aubin 定理及 Schoen 定理，Yamabe 问题得到彻底解决. 合起来就是

定理 7.23 (Aubin-Schoen 定理) 设 (M,g) 是 $n\ge 3$ 维紧致 Riemann 流形，则存在与 g 共形等价的度量 $\tilde g$，使得 $\tilde g$ 的数量曲率为常数.

在证明 Yamabe 猜想的过程中，我们实际上也证明了 Aubin 猜想.

定理 7.24 (Aubin 猜想) 任何 $n\ge 3$ 维紧致 Riemann 流形 M，如果不共形等价于标准球面 $\mathbb{S}^n$，则其 Yamabe 不变量 $\lambda(M)<\lambda(\mathbb{S}^n)$.

第八章 设定共形数量曲率

设 (M,g) 是一 $n \geq 2$ 维 Riemann 流形，给定 M 上一光滑函数 $\widetilde{R}$，本章所关心的问题是：

是否存在与 g 共形等价的度量 $\tilde{g}$，$\tilde{g} \sim g$，使得 $\tilde{g}$ 的数量曲率恰好是 $\widetilde{R}$?

因维数 $n = 2$ 及 $n \geq 3$ 对应不同方程，处理问题的手法、结果也不相同.

第一节 二维情形

设 (M,g) 是二维紧致 Riemann 流形，R 为其数量曲率. 给定 M 上光滑函数 $\widetilde{R}$，问是否存在共形等价的度量 $\tilde{g} \in [g]$，使得 $\tilde{g}$ 的数量曲率等于 $\widetilde{R}$？将共形度量写为 $\tilde{g} = e^u g$，则这一问题等价于求解方程 (见 180 页 (6.8) 式)

$$-\Delta u + R = \widetilde{R} e^u \quad \text{在 } M \text{ 上}. \tag{8.1}$$

对于二维流形，因为截面曲率完全由数量曲率决定 ($R = 2R_{1212}$) 数量曲率是二倍的 Gauss 曲率，故数量曲率具有很强的拓扑意义. 这一点可由下列 Gauss-Bonnet 公式看出 (见陈-陈 [222], Aubin [5] 及陈-李 [220])：

$$\int R \mathrm{d}V = 4\pi\chi(M), \tag{8.2}$$

其中 $\chi(M)$ 是 M 的 Euler-Poincaré 示性数. 注意，对于二维有向流形来说，我们有 $\chi(M) = 2(1 - \mathrm{gen}(M))$，其中 $\mathrm{gen}(M)$ 是其亏格. 若 u 是 (8.1) 的解，在 M 上积分 (8.1) 得

$$\int \widetilde{R} e^u \mathrm{d}V = 4\pi\chi(M). \tag{8.3}$$

上式正是 $(M,\tilde{g})$ 的 Gauss-Bonnet 公式，这是因为 $\tilde{g}$ 的体积元 $\mathrm{d}\widetilde{V} = e^u \mathrm{d}V$ (关于体积元，见第 177 页). 我们将按 $\chi(M) < 0, = 0, > 0$ 三种情形讨论.

因问题只与流形的共形等价度量有关，在讨论问题 (8.1) 时，根据单值化定理，可选择共形度量 g，使得 g 的数量曲率 $R = \text{Const.}$.

一、情形 $\chi(M) < 0$

在此情形，由 (8.3) 知，要使问题 (8.1) 有解，$\widetilde{R}$ 必须在 M 的某些点取负值. 我们有

定理 8.1 (Kazdan-Warner [124]) 设 (M, g) 是二维紧 Riemann 流形，满足 $\chi(M) < 0$，如果 $0 \not\equiv \widetilde{R} \le 0$，则问题 (8.1) 有且仅有一解 $u \in C^\infty(M)$.

证明 用上下解方法 (关于上下解方法的理论，见钟承奎等 [258]). 首先，因 $\chi(M) < 0$，由 Gauss-Bonnet 公式 (8.2)，常数 $R < 0$. 记

$$\widetilde{R}_0 = \frac{1}{V_g}\int_M \widetilde{R}\,\mathrm{d}V, \quad \big(V_g \text{ 是 } (M,g) \text{ 的体积}\big)$$

由条件 $0 \not\equiv \widetilde{R} \le 0$ 知，$\widetilde{R}_0 < 0$. 而由于 $\widetilde{R} - \widetilde{R}_0$ 在 (M, g) 上的积分为零，方程

$$-\Delta\varphi = \widetilde{R} - \widetilde{R}_0$$

有解 $\varphi \in C^\infty(M)$. 令 $\bar{u} = a\varphi + b$，将证明，对于常数 a, $b > 0$ 充分大，$\bar{u}$ 是 (8.1) 的上解. 确实，我们有

$$-\Delta\bar{u} + R - \widetilde{R}e^{\bar{u}} = R - a\widetilde{R}_0 - \widetilde{R}\big(e^{a\varphi+b} - a\big),$$

先取一个常数 $a > 0$，使得 $R - a\widetilde{R}_0 > 0$，然后选择 $b > 0$ 充分大，使得 $e^{a\varphi+b} - a > 0$，此时上式右端为正，而有

$$-\Delta\bar{u} + R \ge \widetilde{R}e^{\bar{u}}, \tag{8.4}$$

即 $\bar{u}$ 是 (8.1) 的上解. 取常数 $c > 0$ 充分大，使得 $R < \widetilde{R}e^{-c}$，令 $\underline{u} = -c$，则

$$-\Delta\underline{u} + R \le \widetilde{R}e^{\underline{u}}, \tag{8.5}$$

即 $\underline{u}$ 是 (8.1) 的下解. 进一步，取 c 再大一些，使得 $\bar{u} - \underline{u} = a\varphi + b + c \ge 0$. 由上下解方法的理论知，(8.1) 存在解 $u \in C^\infty(M)$，且 $\underline{u} \le u \le \bar{u}$.

设 v 是 (8.1) 的另一解，记 $\varphi = u - v$. 在 φ 的最大值点 P，有 $-\Delta\varphi(P) \ge 0$，而由于 φ 满足 $-\Delta\varphi = \widetilde{R}e^{u}(1 - e^{-\varphi})$，从而 $\varphi(P) \le 0$. 类似地，在 φ 的最小值点 Q，有 $\varphi(Q) \ge 0$. 这导致 $\varphi \equiv 0$. □

二、情形 $\chi(M) = 0$

在这种情形，问题有完整的解答. 首先 Berger [38] 得到一个充分条件，而后 Kazdan-Warner [124] 证明这一条件也是充分的.

因我们取 $R = \text{Const.}$，在此情形，由 Gauss-Bonnet 公式 (8.2)，$R = 0$，而方程 (8.1) 写为

$$-\Delta u = \widetilde{R}e^u \quad \text{在 } M \text{ 上}. \tag{8.6}$$

定理 8.2 (Berger-Kazdan-Warner) 设 (M, g) 是二维紧 Riemann 流形，满足 $\chi(M) = 0$，则 $\widetilde{R} \in C^\infty$ 是某个共形度量的数量曲率 (方程 (8.6) 有解) 的充分必要条件是：或者 $\widetilde{R} \equiv 0$，或者 $\widetilde{R}$ 变号且满足

$$\int \widetilde{R} \mathrm{d}V < 0. \tag{8.7}$$

证明 必要性. 设 u 是 (8.6) 的解，若 $\widetilde{R} \not\equiv 0$，由 (8.6) 知，$u \neq \text{Const.}$，并且根据 (8.3) 知，$\widetilde{R}$ 必定变号. 用 e^{-u} 乘 (8.6)，积分，分部积分得

$$\int_M \widetilde{R} \mathrm{d}V = -\int_M e^{-u} |\nabla u|^2 \mathrm{d}V < 0.$$

充分性. 如果 $\widetilde{R} \equiv 0$，易见 $u = 0$ 是问题 (8.6) 的解，故设 $\widetilde{R} \not\equiv 0$. 我们将用变分法讨论问题 (8.6). 令

$$J(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 \mathrm{d}V, \quad u \in \mathscr{A}$$

其中

$$\mathscr{A} = \left\{ u \in H^1(M) : \int \widetilde{R} e^u \mathrm{d}V = 0 \right\}.$$

因有条件 (8.7)，$\mathscr{A}$ 非空. 现考虑极值问题 $\mu = \inf_{u \in \mathscr{A}} J(u)$. 设 $u_k \in H^1(M)$ 是 μ 的一个极小化序列，令 $v_k = u_k - \bar{u}_k$，其中

$$\bar{u}_k = \frac{1}{V_g} \int u_k \mathrm{d}V$$

是 u_k 的平均值，则 $v_k \in \mathscr{A}$ 且 $J(v_k) = J(u_k)$. 由 Poincaré 不等式，$\|v_k\|_{H^1} \leq cJ(v_k)$，故 $\{v_k\}$ 在 $H^1(M)$ 中有界，因而存在一个子列 v_j 在 $H^1(M)$ 中弱收敛于 φ，由 J 的下半弱连续性，$J(\varphi) \leq \underline{\lim}\, J(v_j) = \mu$. 根据定理 6.9 (第 185 页)，

映射 $H^1 \ni u \mapsto e^u \in L^1$ 是紧致的，我们有

$$0 = \lim_j \int \widetilde{R} e^{v_j} \mathrm{d}V = \int \widetilde{R} e^{\varphi} \mathrm{d}V,$$

故 $\varphi \in \mathscr{A}$，而有 $J(\varphi) = \mu$. $\varphi \not\equiv 0$，否则与条件 (8.7) 矛盾. 根据 Lagrange 乘数法，存在常数 λ，使得

$$-\Delta\varphi = \lambda \widetilde{R} e^{\varphi}$$

两边同乘以 $e^{-\varphi}$ 并积分，得 $\lambda \int \widetilde{R} \mathrm{d}V < 0$，这说明 $\lambda > 0$. 令 $u = \varphi + \log\lambda$，则 u 是 (8.6) 的一个弱解. 依照靴带法，获得 u 的正则性. □

三、情形 $\chi(M) > 0$

对于二维紧致维流形 M，若 $\chi(M) > 0$，则只有两个可能，一个是球面 $\mathbb{S}^2$ ($\chi = 2$)，另一个是实射影平面 $\mathbb{R}P^2$ ($\chi = 1$). 标准球面上的共形数量曲率问题，叫做 Nirenberg 问题，我们将专门讨论. 这里只讨论标准的实射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 的情形.

标准的实射影平面 $\mathbb{R}P^2$，通过等同标准球面 $(\mathbb{S}^2, g_0)$ 上的对径点得到，其数量曲率 $R = 2$，体积 $V = 2\pi$. 此时方程 (8.1) 写为

$$-\Delta u + 2 = \widetilde{R} e^u \quad 在 \ \mathbb{R}P^2 \ 上. \tag{8.8}$$

要使 $\widetilde{R} \in C^\infty$ 是某个共形度量的数量曲率，由 (8.3)，$\int \widetilde{R} e^u \mathrm{d}V = 4\pi$，故 $\widetilde{R}$ 必在某些点取正值，而下列定理表明，这也是充分条件.

定理 8.3 (J. Moser [152]) *$\mathbb{R}P^2$ 上的任何光滑函数，只要在某些点取正值，必是某个共形度量 $g \in [g_0]$ 的数量曲率.*

证明 定理证明的关键是应用 Moser-Aubin 不等式. 讨论极值问题：$\mu = \inf\left\{J(u) : u \in \mathscr{A}\right\}$. 这里

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}P^2} |\nabla u|^2 \mathrm{d}V + 2\int_{\mathbb{R}P^2} u \mathrm{d}V,$$

$$\mathscr{A} \triangleq \left\{u \in H^1 : \int \widetilde{R} e^u \mathrm{d}V = 4\pi\right\}.$$

$\mathscr{A} \neq \emptyset$，因为 $\sup \widetilde{R} > 0$. 对于任意 $u \in H^1(\mathbb{R}P^2)$，令 $\bar{u} = (2\pi)^{-1}\int u \mathrm{d}V$，由推论 6.12 得，

$$\int e^u \mathrm{d}V \leq C \exp\left(\beta_2 \|\nabla u\|_2^2 + \bar{u}\right), \tag{8.9}$$

其中 $\beta_2 = 1/16\pi$. 于是，对于 $u \in \mathscr{A}$，

$$4\pi = \int \widetilde{R}e^u \mathrm{d}V \le [\sup \widetilde{R}] \int e^u \mathrm{d}V \le C \exp\left(\beta_2 \|\nabla u\|_2^2 + \bar{u}\right),$$

上式取对数，记得 $\beta_2 = 1/16\pi$，$V = 2\pi$，我们有

$$\int u \mathrm{d}V \ge -(1/8)\|\nabla u\|_2^2 - C,$$

因而

$$J(u) \ge (1/4)\|\nabla u\|_2^2 - C, \quad \forall\, u \in \mathscr{A}. \tag{8.10}$$

因此 μ 是有限数.

设 $\{u_i\} \subset \mathscr{A}$ 是 μ 的极小化序列，即 $\lim\limits_i J(u_i) = \mu$. 由 (8.10) 知，$\|\nabla u_i\|_2$ 有界. 这一事实及 $J(u_i)$ 的有界性隐含 $\|\bar{u}_i\|_{L^1} \le \mathrm{Const.}$ 有界，从而 $\{u_i\}$ 在 H^1 中有界. 这样，我们可抽得一子列 $\{u_j\}$，使得

$$u_j \xrightarrow{w} \varphi \quad \text{在 } H^1 \text{ 中}, \quad u_j \xrightarrow{s} \varphi \quad \text{在 } L^1 \text{ 中},$$

由映射 $H^1 \ni u \mapsto e^u \in L^1$ 的紧致性 (185 页定理 6.9)，我们有

$$4\pi = \lim_j \int \widetilde{R}e^{u_j} \mathrm{d}V = \int \widetilde{R}e^{\varphi} \mathrm{d}V,$$

故 $\varphi \in \mathscr{A}$. 由 J 的下半弱连续性，$J(\varphi) \le \varliminf\limits_j J(u_j) = \mu$. 因为 μ 是下确界，故 $J(\varphi) = \mu$. 因此，存在 Lagrange 乘数 λ，使得

$$-\Delta\varphi + 2 = \lambda \widetilde{R} e^{\varphi},$$

两边积分得 $\lambda = 1$，因而 φ 是问题 (8.8) 的一个弱解，依靴带法，$\varphi \in C^\infty$. □

第二节 高维情形

本节讨论的问题是：给定 $n \ge 3$ 维 Riemann 流形 (M, g) 上一个光滑函数 $\widetilde{R}$，问是否存在共形度量 $\tilde{g} \in [g]$，使得 $\widetilde{R}$ 恰好是 g 的数量曲率？我们曾多次提到，如果将共形度量写作 $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$，那么这个问题等价于求解非线性方程

$$-\Delta u + \kappa u = K u^{N-1}, \quad u > 0 \quad \text{在 } M \text{ 上}, \tag{8.11}$$

其中 $N=\frac{2n}{n-2}$，$\kappa=\frac{n-2}{4(n-1)}R$，$R$ 是 (M,g) 的数量曲率，$K=\frac{n-2}{4(n-1)}\widetilde{R}$.

因为我们是在共形等价类 $[g]$ 中求解问题，根据我们对 Yamabe 问题的认识，在写方程 (8.11) 时当然选基准度量 g，使得 g 极小化 Yamabe 泛函 (7.3)，因而 R, $\kappa=\text{Const.}$.

注意，如果 $\widetilde{R}$ 是共形度量 $\tilde{g}\in[g]$ 的数量曲率，则 K 是共形度量 $\frac{4(n-1)}{n-2}\tilde{g}$ 的数量曲率. 我们将按 Yamabe 不变量 $\lambda(M,g)$ (见 193 页) 的符号展开讨论.

一、情形 $\lambda(M,g)<0$

在这种情形，$\kappa<0$. 容易证明，此时问题 (8.11) 有解的一个必要条件是

$$\int_M K\,\mathrm{d}V<0. \tag{8.12}$$

确实，设 u 是 (8.11) 的正解，用 u^{1-n} 乘方程两边，积分，那么便得 (8.12). 因此 K 必在某些点取负值.

定理 8.4 (Aubin) 设 (M,g) 是 $n\geq 3$ 维紧 Riemann 流形，满足 $\lambda(M)<0$，如果在 M 上 $K<0$，则问题 (8.11) 有且仅有一解 $u\in C^\infty(M)$.

证明 取常数 $a>0$ 充分小，取 $b\,(>a)$ 充分大，则 $\underline{u}=a$ 及 $\bar{u}=b$ 是 (8.11) 的一对下、上解. 因而问题 (8.11) 存在解 $u\in C^\infty$，且 $a\leq u\leq b$.

唯一性可在更弱的条件 $K\leq 0$ 下获得，其证明与定理 8.1 的证明类似. □

我们要问，在定理 8.4 中，是否允许 K 在某些点取零值呢? 定义

$$\mathcal{N}=\{x\in M:K(x)\geq 0\},\quad \lambda=\inf_{\varphi\in\mathscr{D}(\mathring{\mathcal{N}})}\frac{\|\nabla\varphi\|_2^2}{\|\varphi\|_2^2}$$

如果 $\mathring{\mathcal{N}}=\emptyset$，则定义 $\lambda=\infty$. 我们有

定理 8.5 (Aubin) 设 $\kappa<0$，设 M 上的光滑函数 K 满足 $K^-\not\equiv 0$，则

(α) 问题 (8.11) 有解的必要条件是

$$-\kappa<\lambda; \tag{8.13}$$

(β) 如果 $K\leq 0$，则条件 (8.13) 还是问题 (8.11) 有解的充分条件;

(γ) 在条件 (8.13) 下，存在只依赖于 K^- 的常数 C，使得当 $\sup K<C$ 时，问题 (8.11) 有解.

证明 结论 (α) 的证明 设 $\mathring{\mathcal{N}} \neq \emptyset$, $\mathring{\mathcal{N}}$ 的有限个连通分支为 $\Omega_1, \cdots, \Omega_m$, 它们都是带边流形，$-\Delta$ 在诸 $H_0^1(\Omega_i)$ 上的第一特征值 $\lambda_i \geq \lambda$，并且 $\lambda = \min\{\lambda_i : \leq i \leq m\}$，不妨设 $\lambda_1 = \lambda$，其相应特征函数为 φ，即

$$-\Delta\varphi = \lambda\varphi, \quad \varphi > 0 \quad 在 \, \Omega_1 \, 上, \quad \varphi|_{\partial\Omega_1} = 0.$$

用反证法完成结论 (α) 的证明. 假定 $-\kappa \geq \lambda$，而问题 (8.11) 有解 Φ. 选择 φ 使得 $\Phi \geq \varphi$，并且至少在 Ω_1 内某点 $\varphi = \Phi$. 在 Ω_1 上，$K = K^+$，我们有

$$-\Delta(\Phi - \varphi) = K^+\Phi^{N-1} - \kappa\Phi - \lambda\varphi \geq 0,$$

又在 $\partial\Omega_1$ 上，$\Phi > 0 = \varphi$. 根据极大值原理，在 Ω_1 内 $\Phi > \varphi$，这与在 Ω_1 内某点 $\varphi = \Phi$ 的假设矛盾.

结论 (β) 的证明 这是结论 (γ) 的特殊情形.

结论 (γ) 的证明 写 $K^+ = \varepsilon f$，其中 $f \geq 0$ 是任一满足 $f \cdot K^- = 0$ 的函数，不妨设 $\sup f = 1$. 需证: $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ 时，对于 $K = \varepsilon f - K^-$，问题 (8.11) 有解.

因充分小正数是问题 (8.11) 的下解，故只须找到 (8.11) 的一个上解.

取 N 的一个邻域 W，使得 $-\Delta$ 在 $H_0^1(W)$ 上的第一特征值 μ_W 满足，$-\kappa < \lambda_W < \lambda$. 由 N 的紧致性，W 具有有限个连同分支，W_i $(1 \leq i \leq m)$. 设 $\phi_i > 0$ 是 $-\Delta$ 在 $H_0^1(W_i)$ 上第一特征值 μ_i 的特征函数，

$$-\Delta\phi_i = \mu_i\phi_i \quad 在 \, W_i \, 上, \quad \phi_i|_{\partial W_i} = 0. \quad (-\kappa < \mu_i)$$

取连通邻域 ω_i，使得 $\bar{\omega}_i \subset W_i$，且 $N \cap W_i \subset \omega_i$. 现在，取一个光滑正函数 ϕ，使得在 ω_i 上 $\phi = \phi_i$. 令 $\bar{u} = \alpha\phi$，将证明，对于 α 适当大，及 ε 适当小，$\bar{u}$ 是问题 (8.11) 的一个上解.

在 $M - \bigcup \omega_i$ 上，$K \leq -\eta < 0$. 因 $N > 2$，故对于 α 充分大，成立

$$-\alpha(\Delta\phi + \kappa\phi) \geq -\eta(\alpha\phi)^{N-1} \geq K(\alpha\phi)^{N-1},$$

取定这样一个 α. 在 ω_i 上，$\phi = \phi_i$. 对于 $\varepsilon_0 > 0$ 充分小，当 $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ 时将有

$$-\alpha(\Delta\phi + \kappa\phi) = \alpha(\mu_i + \kappa)\phi_i \geq \varepsilon f(\alpha\phi)^{N-1} \geq K(\alpha\phi)^{N-1},$$

故 $\bar{u} = \alpha\phi$ 是问题 (8.11) 的一个上解. □

二、情形 $\lambda(M,g)\geq 0$

在这种情形，$\kappa\geq 0$，而且 $\kappa=0$ 当且仅当 $\lambda(M)=0$.

如果 $\kappa>0$，则问题 (8.11) 有解的必要条件是 K 在某些点取正值.

如果 $\kappa=0$，因为 $K\neq$ Const.，易见，此时问题 (8.11) 有解的必要条件是

$$K \text{ 变号，且 } \int K\,\mathrm{d}V<0. \tag{8.14}$$

1. **一个判据.**

我们将用变分法讨论. 如同往常，仍记最佳 Sobolev 常数为 $S=4^{-1}n(n-2)\omega_n^{2/n}$. 令

$$J(u)=\int_M\left\{|\nabla u|^2+\kappa|u|^2\right\}\mathrm{d}V, \tag{8.15a}$$

讨论极值问题

$$\mu(K)=\inf\{J(u):\,u\in\mathcal{W}\}, \tag{8.15b}$$

其中

$$\mathcal{W}=\left\{u\in H^1(M):\,\int K|u|^N=1\right\}. \tag{8.15c}$$

因有 $\sup K>0$，$\mathcal{W}$ 非空.

我们指出，当 $\lambda(M)>0$ 时，条件 $\sup K>0$ 隐含 $\mu(K)>0$. 在 $\lambda(M)=0$ 时，条件 (8.14) 也保证了 $\mu(K)>0$. 因此，泛函 J 在 $\mathcal{W}$ 上的临界点，经过拉伸 Lagrange 常数，对应问题 (8.11) 的解.

定理 8.6　设 (M,g) 是 $n\geq 3$ 维 Riemann 流形，具有恒常的数量曲率 $R\geq 0$，M 上的光滑函数 K 满足 $\sup K>0$，如果 $R=0$ 则进一步假设 K 满足 (8.14). 则

$$0<\mu(K)\leq\Lambda\triangleq S[\sup K]^{\frac{2-n}{n}}. \tag{8.16}$$

如果 $\mu(K)<\Lambda$，则 $\mu(K)$ 的任一极小化序列在 H^1 中相对列紧，因而 $\mu(K)$ 可被某个 $u\in\mathcal{W}$ 取到，因而问题 (8.11) 有解.

注记 8.1　定理 8.16 将问题 (8.11) 解的存在性化归为，寻找试验函数 $u\in\mathcal{W}$，使得 $J(u)<\Lambda$.

证明　1° 设 K 在点 $P\in M$ 取最大值 $K_0=\sup K$，则 $|\nabla K(P)|=0$. 在点 P 的测地法坐标系 $\{x^i\}$ 下，$K=K_0+O(|x|^2)$，取试验函数 u_ε 如

(7.10)，那么，仿照引理 7.2 中不等式 $\lambda(M) \le \lambda(S^n)$ 的证明，可获证不等式 $\mu(K) \le \Lambda$. $\mu(K) > 0$ 的证明放在第 2° 步末.

2° 设 $u_i \in \mathcal{W}$ 是极值问题 (8.15b) 的一极小化序列，即

$$\|\nabla u_i\|_2^2 + \kappa\|u_i\|_2^2 = \mu(K) + o(1), \quad u_i \in \mathcal{W}, \tag{8.17}$$

往证 $\{u_i\}$ 在 $H^1(M)$ 中有界. 如果 $\kappa > 0$，直接由 (8.17) 知，$\{u_i\}$ 在 $H^1(M)$ 中有界. 在 $\kappa = 0$ 的情形，只须证明 $\|u_i\|_2$ 有界. 用反证法，假定有子列使得 $\|u_j\|_2 \triangleq \beta_j \to \infty$，令 $v_j = \beta_j^{-1}|u_j|$，则 $\|v_j\|_2 = 1$，由 (8.17) 知，$\|\nabla v_j\|_2 \to 0$. 故有子列 $\{v_m\}$ 在 L^1 中，在 L^2 中及 a.e. 收敛于 $v^0 \ne 0$，于是 v_m 在 M 上的平均值 $\bar{v}_m \to c > 0$，由 Poincaré 不等式及 Sobolev 嵌入定理，$\|v_m - \bar{v}_m\|_N \to 0$，因此，$\|v_m - c\|_N \to 0$，这导致

$$\int Kc^N \mathrm{d}V = \lim_m \int K\bar{v}_m^N \mathrm{d}V = \lim_m \beta_m^{-N} \int K|u_m|^N \mathrm{d}V = 0,$$

与条件 (8.14) 矛盾. 因而 $\{u_i\}$ 在 $H^1(M)$ 中有界.

3° 现证 $\mu(K) > 0$. 确实，当 $\lambda(M) > 0$ 时，$\mu(K) \ge [\sup K]^{-2/N}\lambda(M) > 0$. 当 $\lambda(M) = 0$ 时，也有 $\mu(K) > 0$. 不然的话，$\mu(K) = 0$，由 (8.17) 知，存在非负函数列 $\{u_i\} \subset \mathcal{W}$，使得 $\|\nabla u_i\|_2 \to 0$. 依第 2° 段的论证，存在子列使得 $\bar{u}_j \to c$，且 $\|u_j - c\|_N \to 0$. 因此

$$1 = \int K|u_j|^N \mathrm{d}V \to \int K|c|^N \mathrm{d}V,$$

与条件 (8.14) 矛盾.

4° 假定 (8.16) 成立严格不等式 $\mu(K) < \Lambda$，往证 $\{u_i\}$ 在 $H^1(M)$ 中有收敛子列. 现在，抽取 $\{u_i\}$ 的子列 $\{u_j\}$，使得 $u_j \xrightarrow{w} u$ 在 H^1 中，$u_j \xrightarrow{s} u$ 在 L^2 中，$u_j \xrightarrow{\text{a.e.}} u$ 在 M 上. 令 $\theta_j = u_j - u$，则 $\|\theta_j\|_2 \to 0$，须证 $\|\nabla\theta_j\|_2 \to 0$.

由 (8.17) 得

$$\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla\theta_j\|_2^2 + \kappa\|u\|_2^2 = \mu(K) + o(1).$$

由 $\mu(K)$ 的定义，我们有

$$\mu(K)\Big(\int K|u|^N\Big)^{2/N} \le \|\nabla u\|_2^2 + \kappa\|u\|_2^2,$$

故由以上两式得

$$\mu(K)\Big(\int K|u|^N\Big)^{2/N}+\|\nabla\theta_j\|_2^2\le\mu(K)+o(1),\tag{8.18}$$

另一方面，根据 Brezis-Lieb 引理，我们有

$$1=\int K|u+\theta_j|^N=\int K|u|^N+\int K|\theta_j|^N+o(1),$$

注意到 $N>2$，我们有

$$1\le\Big(\int K|u|^N\Big)^{2/N}+\big[\sup K\big]^{2/N}\|\theta_j\|_N^2+o(1),\tag{8.19}$$

应用最佳 Sobolev 不等式 (见 182 页 Hebey-Vaugon定理 6.3)，

$$\|\theta_j\|_N^2\le\frac{1}{S}\|\nabla\theta_j\|_2^2+o(1),$$

将上式代入 (8.19) 得

$$1\le\Big(\int K|u|^N\Big)^{2/N}+\frac{1}{\Lambda}\|\nabla\theta_j\|_2^2+o(1),\tag{8.20}$$

将 (8.20) 式两端乘以 $\mu(K)$ (注意 $\mu(K)>0$)，结合 (8.18) 得

$$\big[1-\mu(K)/\Lambda\big]\|\nabla\theta_j\|_2^2\le o(1).$$

令 $j\to\infty$，因 $\mu(K)<\Lambda$，我们有 $\|\nabla\theta_j\|_2^2\to 0$. □

2. $\lambda(M)=0$ **的情形.**

定理 8.7 (Escobar-Schoen [95])　设 (M,g) 是 $n\ge 3$ 维 Riemann 流形，处处局部共形平坦，数量曲率 $R=0$. M 上的光滑函数 K 满足 (8.14)，并且 K 在其某个最大值点处，具 $(n-3)$ 阶平坦. 在这些假设下，问题 (8.11) 可解.

当 $n=3$ 或 4 时，(M,g) 的平坦性假设可以去掉，而 K 的平坦性条件则自动满足，在此情形，定理 8.7 给出了最佳结果.

略加修改 Yamabe 问题情形 Schoen 定理的证明 (参见 219 页的内容)，就可证明定理 8.7. 而适当修改 Aubin 定理的证明，可以得到下列结果:

定理 8.8 (Aubin-Hebey) 设 (M,g) 是 $n\geq 6$ 维 Riemann 流形，数量曲率 $R=0$. 设 M 上的光滑函数 K 满足条件 (8.14)，并且在 K 的某个最大值点 P 处，Weyl 张量 $|W(P)|\neq 0$. 则问题 (8.11) 在下列两种情形可解:

(α) 当 $n=6$ 时，$\Delta K(P)=0$;

(β) 当 $n>6$ 时，$\Delta K(P)=0$ 且 $\Delta^2 K(P)=0$.

3. $\lambda(M)>0$ 的情形.

定理 8.9 (Aubin [3]) 设 (M,g) 不共形等价于标准球面，则存在一个常数 $k>1$，使得对于任意光滑函数 K，只要满足

$$0<\sup K\leq k\inf K, \tag{8.21}$$

那么 K 就是某个共形度量的数量曲率.

证明 根据 Aubin 猜想 (定理 7.24)，(M,g) 不共形等价于标准球面，意味着 Yamabe 不变量 $\lambda(M)<\lambda(\mathbb{S}^n)=S$. 因所取基准度量 g 极小化 Yamabe 泛函 (见 192 页 (7.3) 式)，所以

$$\lambda(M)=Q(g)=\frac{\int_M \kappa \mathrm{d}V}{\left(\int_M \mathrm{d}V\right)^{2/N}}.$$

取正的常数 $c\in\mathcal{W}$ 作试验函数 ($\mathcal{W}$ 已由 (8.15c) 定义)，

$$J(c)=\frac{\int_M \kappa c^2 \mathrm{d}V}{\left(\int_M Kc^N \mathrm{d}V\right)^{2/N}}\leq [\inf K]^{\frac{-2}{N}}\lambda(M)$$

$$=[\sup K/\inf K]^{2/N}\lambda(M)[\sup K]^{-2/N}.$$

因 $\lambda(M)<S$，存在充分接近 1 的常数 $k>1$，使得 $k^{2/N}\lambda(M)<S$. 故当 (8.21) 满足时，$J(c)<\Lambda=S[\sup K]^{-2/N}$. 应用定理 8.6，推知问题 (8.11) 可解. □

定理 8.10 (Escobar-Schoen [95]) 设 $n\geq 3$ 维 Riemann 流形 (M,g) 不共形等价于标准球面. M 上的光滑函数 K 满足 $\sup K>0$. 如果下列两条件之一满足: 或者(α) $n=3$; 或者 (β) $n\geq 4$, (M,g) 局部共形平坦，且在 K 的某个最大值点 P 处，K 具 $(n-2)$ 阶平坦; 则 K 是某个共形度量的数量曲率.

当 $n=4,5$ 时，关于流形局部共形平坦的条件可去掉.

上述定理的证明依然可通过修改 Yamabe 问题的 Schoen 定理的证明得到. 同样，修改 Aubin 定理的证明，可以得到以下结果:

定理 8.11 (Aubin-Hebey) 设 (M,g) 是 $n\ge 6$ 维 Riemann 流形，数量曲率 $R>0$. 设 $K\in C^\infty(M)$ 满足 $\sup K>0$，并且在 K 的某个最大值点 P 处，Weyl 张量 $|W(P)|\ne 0$. 则问题 (8.11) 在下列两种情形可解:

(α) 当 $n=6$ 时，$\Delta K(P)=0$;

(β) 当 $n>6$ 时，$\Delta K(P)=0$，$\Delta\Delta K(P)=0$.

第三节 Nirenberg 问题

在 1960 年代末，L. Nirenberg 提出一个问题：给定标准二维球面 $(\mathbb{S}^2,g_0)$ 上一个光滑函数 f，问 $\widetilde{R}=2+\varepsilon f$ (ε 可以充分小) 是否为某个共形度量 $\tilde{g}\in[g_0]$ 的数量曲率？

若将度量 g 写作 $g=e^u g_0$，Nirenberg 问题等价于求解方程 (因 $R=2$，此时方程 (8.1) 写为):

$$-\Delta u+2=\widetilde{R}e^u \quad 在\ \mathbb{S}^2\ 上. \tag{8.22a}$$

我们也可在标准 n 维球面 $(\mathbb{S}^n,g_0)$ 上提出 Nirenberg 问题. 高维 Nirenberg 问题是：给定 $n\ge 3$ 维标准球面 $\mathbb{S}^n$ 上一个光滑函数 $\widetilde{R}$，问 $\widetilde{R}$ 是否为某个共形度量 $g\in[g_0]$ 的数量曲率？这个问题等价于在 $\mathbb{S}^n$ 求解方程

$$-\Delta u+\kappa u=Ku^{N-1},\ u>0 \quad 在\ \mathbb{S}^n\ 上, \tag{8.22b}$$

其中 $\kappa=\frac{1}{4}n(n-2)$，$K=\frac{n-2}{4(n-1)}\widetilde{R}$. 我们假设 $\sup K>0$，这是问题 (8.22b) 有解的必要条件.

Nirenberg 问题 (包括高维情形) 的困难之处在于，标准球面 $(\mathbb{S}^n,g_0)$ 是唯一的 n 维 Riemann 流形，其中所有自身到自身的共形变换构成的集合非紧. 这一论断历史上叫做 Lichnerowicz 猜想，由 Lelong-Ferrand [131] 证明.

如果试图用变分法，仿照解决 $\mathbb{R}P^2$ 上问题 (8.8) 的办法来解决问题 (8.22a)，就会发现，由于 $\mathbb{S}^2$ 的体积为 4π，无法得到极小化序列的有界性. 另一方面，问题 (8.22a) 的可解性存在着实质性的障碍，Kazdan-Warner 障碍.

同样，上一节所用的变分法，不再适用于现在的 Nirenberg 问题. 一方面，根据定理 8.6，$\mu(K)\le\Lambda$，其中 $\mu(K)$, Λ, $\mathcal{W}$ 等已由 (8.15) 定义. 另一方面，

$$\mu(K)=\inf_{u\in\mathcal{W}}\frac{\int\left(|\nabla u|^2+\kappa u^2\right)\mathrm{d}V}{\left(\int K|u|^N\right)^{2/N}}\ge\left[\sup K\right]^{-2/N}\lambda(\mathbb{S}^n)=\Lambda,$$

所以 $\mu(K)=\Lambda$，故定理 8.6 不适用于 Nirenberg 问题. 同时，若 $K\neq$ Const.，则 $\mu(K)$ 不能被达到. 确实，

$$\int K|\varphi|^N\mathrm{d}V<\left[\sup K\right]\int|\varphi|^N\mathrm{d}V,\quad\forall\,\varphi\in\mathcal{W},$$

因而 $J(\varphi)>\mu(K)$. 也就是说，J 在 $\mathcal{W}$ 上若有临界点，必然是非极小临界点. 与二维情形相同，问题 (8.22b) 的可解性也存在 Kazdan-Warner 障碍.

一、Kazdan-Warner 障碍

我们知道，$(\mathbb{S}^n,g_0)$ 上，$-\Delta$ 的第一特征值 $\lambda_1=n$，对应的特征函数构成 $(n+1)$ 维线性空间 $\mathcal{F}$. 记 $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_{n+1})$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的标准坐标，则 $x_i|_{\mathbb{S}^n}$ ($1\leq i\leq n+1$) 构成 $\mathcal{F}$ 的一个基底，按 L^2 内积互相垂直.

1. Kazdan-Warner 障碍（二维情形）.

定理 8.12.(Kazdan-Warner [123]) 设 u 是问题 (8.22a) 的解，则

$$\int_{\mathbb{S}^2}(\nabla\varphi\cdot\nabla\widetilde{R})e^u\mathrm{d}V=0,\quad\forall\,\varphi\in\mathcal{F}.\tag{8.23}$$

证明 首先，由 (8.22a) 式得，$\widetilde{R}=e^{-u}(-\Delta u+2)$，用梯度算子作用两边得

$$\nabla\widetilde{R}=e^{-u}\nabla(-\Delta u)-(-\Delta u+2)e^{-u}\nabla u,$$

将上式与 $e^u\nabla\varphi$ 在切空间上作数量积，积分 (略去体积元素) 得

$$\int(\nabla\varphi\cdot\nabla\widetilde{R})e^u=-\int\nabla\varphi\cdot\nabla\Delta u-2\int\nabla u\cdot\nabla\varphi+\int(\Delta u)\nabla u\cdot\nabla\varphi$$

因 φ 是第一特征函数，$\Delta\varphi=-2\varphi$，分部积分两次得

$$-\int\nabla\varphi\cdot\nabla\Delta u=\int\Delta\varphi\Delta u=2\int\nabla\varphi\cdot\nabla u,$$

因 φ 的二阶协变导数 $\nabla_{ij}\varphi=g_{ij}\varphi$，使用符号 ∇^i, ∇^{ij} 等 (见 181 页)，我们有

$$\begin{aligned}-\int(\Delta u)\nabla u\cdot\nabla\varphi&=\int\nabla u\cdot\nabla(\nabla u\cdot\nabla\varphi)\\&=\int\nabla^iu\nabla_{ji}u\nabla^j\varphi+\int\nabla^iu\nabla_{ji}\varphi\nabla^ju\\&=\frac{1}{2}\int\nabla_j\big(|\nabla u|^2\big)\nabla^j\varphi-\int\varphi|\nabla u|^2=0.\end{aligned}$$

定理 8.12 证毕. □

Kazdan-Warner 障碍提供了许多这样的函数 $\widetilde{R}$，它们不能是 $(\mathbb{S}^2, g_0)$ 的某个共形度量的数量曲率. 例如，设 $\varphi \neq 0$ 是 $-\Delta$ 的第一特征值 $\lambda_1 = 2$ 的特征函数，则 $\widetilde{R} = 2 + \varepsilon f$ 不可能是任何共形度量的数量曲率.

确实，设 $R = 2 + \varepsilon\varphi$ 是某个共形度量 $\tilde{g} = e^u g_0$ 的数量曲率，据 (8.23)，我们将有 $0 = \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla\varphi|^2 e^u \mathrm{d}V$，这显然是个矛盾.

2. Kazdan-Warner 障碍（高维情形）.

定理 8.13 (Kazdan-Warner [123]) 设 u 是问题 (8.22b) 的解，则对于任意 $\varphi \in \mathcal{F}$，成立

$$\int_{\mathbb{S}^n} (\nabla\varphi \cdot \nabla K) u^N \mathrm{d}V = 0. \tag{8.24}$$

证明 可参照定理 8.12 的证明完成. □

例 8.1 设 $\varphi \in \mathcal{F}$，根据定理 8.13，函数 $K = 1 + \varepsilon\varphi$ 不是任何共形度量 $g \in [g_0]$ 的数量曲率.

3. Aubin 的非线性 Fredholm 型定理（二维情形）.

定理 8.14 [Aubin [4]] 设 f 是 $\mathbb{S}^2$ 上的光滑函数，满足 $\int f \mathrm{d}V > 0$，则存在 $h \in \mathcal{F}$，使得问题 (8.22a) 对于 $\widetilde{R} = f - h$ 有解.

证明 用变分法证明. 令

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^2 \mathrm{d}V + 2\int_{\mathbb{S}^2} u \mathrm{d}V,$$

讨论条件极值问题 $\mu = \inf\left\{J(u) : u \in \mathscr{B}\right\}$，其中

$$\mathscr{B} = \left\{u \in H^1 : \int f e^u \mathrm{d}V = 8\pi,\ \int \vec{x} e^u \mathrm{d}V = \vec{0}\right\}.$$

易见，$\mathscr{B} \neq \emptyset$. 取常数 $1/32\pi < \beta < 1/16\pi$，由 Aubin 不等式 (6.19) 得

$$\int e^u \mathrm{d}V \leq C(\beta) \exp\left(\beta\|\nabla u\|_2^2 + \bar{u}\right), \quad \forall\, u \in \mathscr{B}, \tag{8.25}$$

其中 $\bar{u}$ 是 u 的平均值，$\bar{u}=(4\pi)^{-1}\int u\mathrm{d}V$. 我们有

$$8\pi=\int fe^u\mathrm{d}V\le[\sup f]\int e^u\mathrm{d}V\le C\exp\left(\beta\|\nabla u\|_2^2+\bar{u}\right),$$

上式取对数，注意 $V=4\pi$，我们有

$$\int u\mathrm{d}V\ge-(4\pi\beta)\|\nabla u\|_2^2-C,$$

因而

$$J(u)\ge(\tfrac{1}{2}-8\pi\beta)\|\nabla u\|_2^2-C,\quad\forall\,u\in\mathscr{B}. \tag{8.26}$$

因 $(\frac{1}{2}-8\pi\beta)>0$，因此 μ 是有限数.

设 $\{u_i\}\subset\mathscr{B}$ 是 μ 的极小化序列，即 $\lim\limits_i J(u_i)=\mu$. 由 (8.26) 知，$\|\nabla u_i\|_2$ 有界. 这一事实及 $J(u_i)$ 的有界性隐含 $\|\bar{u_i}\|_{L^1}\le$ Const. 有界，从而 $\{u_i\}$ 在 H^1 中有界. 应用 Kondrachov 定理及定理 6.9，可抽得一子列 $\{u_j\}$，使得

$$u_j\xrightarrow{w}\varphi\quad 在\ H^1\ 中,\quad u_j\xrightarrow{s}\varphi\quad 在\ L^1\ 中,\quad e^{u_j}\xrightarrow{s}e^{\varphi}\quad 在\ L^1\ 中,$$

故 $\varphi\in\mathscr{B}$. 由 J 的下半弱连续性，$J(\varphi)\le\underline{\lim\limits_j}\,J(u_j)=\mu$. 故 $J(\varphi)=\mu$，因为 μ 是下确界. 根据 Lagrange 乘数法，存在常数 λ 及函数 $h=\overrightarrow{\Lambda}\cdot\vec{x}\in\mathcal{F}$ ($\overrightarrow{\Lambda}\in\mathbb{R}^3$ 是常向量)，使得

$$-\Delta\varphi+2=\lambda fe^{\varphi}-he^{\varphi},$$

两边积分得 $\lambda=1$. 令 $\widetilde{R}=f-h$，则 φ 是问题 (8.22a) 的一个弱解，由靴带法，$\varphi\in C^\infty$. □

4. Aubin 的非线性 Fredholm 型定理（高维情形）.

定理 8.15 [Aubin [4]] 设 f 是 $n\ge3$ 维标准球面 $\mathbb{S}^n$ 上的光滑函数，如果 f 满足 $0<\sup f<2^{2/(n-2)}\inf f$，则存在函数 $h\in\mathcal{F}$，使得 $K=f-h$ 是某个共形度量 $g\in[g_0]$ 的数量曲率.

证明 用变分法证明. 令 $J(u)=\|\nabla u\|_2^2+\kappa\|u\|_2^2$，讨论条件极值问题 $\nu=\inf\left\{J(u):\,u\in\mathscr{B}\right\}$，其中

$$\mathscr{B}=\left\{u\in H^1:\,\int fu^N\mathrm{d}V=1,\ \int\vec{x}u^N\mathrm{d}V=\vec{0}\right\}.$$

显然存在常数 $c>0$ 使得 $c\in\mathscr{B}$. 因而 (仍记 $\Lambda=S[\sup f]^{-2/N}$)

$$\begin{aligned}\nu=\inf_{v\in\mathscr{B}}J(v)&\le J(c)\\&\le\left[\sup f/\inf f\right]^{2/N}\left[\sup f\right]^{-2/N}\lambda(\mathbb{S}^n)<2^{\frac{2}{n}}\Lambda.\end{aligned}$$

设非负函数列 $\{u_j\}\subset\mathscr{B}$ 是 ν 的极小化序列，即

$$\|\nabla u_j\|_2^2+\kappa\|u_j\|_2^2=\nu+o(1),\tag{8.27}$$

易见 $\{u_j\}$ 有界. 从而可抽得子列使得 $u_j\stackrel{w}{\longrightarrow}u$ 在 H^1 中，$u_j\stackrel{s}{\longrightarrow}u$ 在 L^2 中，并且存在 $h=\overrightarrow{\Lambda}\cdot\vec{x}\in\mathcal{F}$ ($\overrightarrow{\Lambda}\in\mathbb{R}^{n+1}$ 是常向量)，使得

$$-\Delta u_j+\kappa u_j=(\nu f-h)u_j^{N-1}+o(1),$$

其中 $o(1)\stackrel{s}{\longrightarrow}0$ 在 H^{-1} 中. 如果 $u\neq0$，那么 u 将满足方程

$$-\Delta u+\kappa u=(\nu f-h)u^{N-1},$$

经过拉伸 Lagrange 常数 ν，应用极大值原理，正则化等手续，便可证得定理.

用反证法往证 $u\neq0$. 假定 $u=0$，那么 $\|u_j\|_2\to0$. 因 $u_j\in\mathscr{B}$，应用 Aubin 不等式 (6.12) 得

$$\|u_j\|_N^2\le\left[2^{-2/n}S^{-1}+\varepsilon\right]\|\nabla u_j\|_2^2+o(1),\tag{8.28}$$

其中 $\varepsilon>0$ 充分小. 此外，$u_j\in\mathscr{B}$ 表明

$$1=\left(\int fu_j^N\right)^{2/N}\le\left[\sup f\right]^{2/N}\|u_j\|_N^2.\tag{8.29}$$

将 (8.28) 代入 (8.29) 得

$$1\le\left(2^{-2/n}\Lambda^{-1}+C\varepsilon\right)\|\nabla u_j\|_2^2+o(1),\tag{8.30}$$

将 (8.30) 两端乘以 ν，然后代入 (8.27) 得

$$\left[1-2^{-2/n}\Lambda^{-1}\nu-c\varepsilon\right]\|\nabla u_j\|_2^2\le o(1),$$

因 $\nu<2^{2/n}\Lambda$，而 $\varepsilon>0$ 充分小，这就意味着 $\|\nabla u_j\|_2\to0$. 由 Sobolev 嵌入定理，$\|u_j\|_N\to0$，故

$$1=\int fu_j^N\to0,$$

这一矛盾证明 $u \neq 0$. □

二、G 不变函数 K

本目讨论 K 具有对称性的情形，即 K 在某个非平凡等距变换群 G 作用下不变.

1. 若干概念. 流形 (M,g) 上的全体等距变换构成的集合，关于映射的复合构成一个群，称为 Riemann 流形 (M,g) 的等距变换群，记为 $\mathrm{Isom}(M)$. 可以证明，当 (M,g) 紧致时，$\mathrm{Isom}(M)$ 为紧致 Lie 群.

对于标准球面 $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 来说，$\mathbb{S}^n$ 上任意一个等距变换都是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的正交变换在 $\mathbb{S}^n$ 上的限制，因而 $\mathrm{Isom}(\mathbb{S}^n) \cong \mathrm{O}(n+1)$. 适当选择坐标系，$\mathbb{R}^{n+1}$ 上的正交变换 Q 取对角形式，$Q = \mathrm{diag}\big(R_1, \cdots, R_k, \pm 1, \cdots, \pm 1\big)$，其中诸 R_j 是二阶正交矩阵.

记 O_G^x 为点 $x \in M$ 在群 G 作用下的轨道，即 $O_G^x = \{\sigma(x) : \sigma \in G\}$. 集合 O_G^x 的基数记为 $\mathrm{Card}\, O_G^x$.

设 $G \subset \mathrm{Isom}(G)$ 是闭子群. $\mathbb{S}^n$ 上的函数 u 称为是 G 不变的，如果对于所有 $x \in \mathbb{S}^n$ 及所有 $\sigma \in G$ 均有 $u \circ \sigma(x) = u(x)$. 记

$$H_G^1(M) = \big\{u \in H^1(M) : u \text{ 为 } G \text{ 不变}\big\},$$

那么 $H_G^1(M)$ 是 Hilbert 空间，它的对偶空间记为 $H_G^{-1}(M)$.

$H^1(M)$ 上的泛函 Φ 称为 G 不变的，如果对于任意 $u \in H_G^1(M)$ 及任意 $\sigma \in G$ 均有 $\Phi(u \circ \sigma) = \Phi(u)$. 易见，泛函 $\int |\nabla u|^2$ 是 G 不变的. 如果函数 K 是 G 不变的，那么泛函 $\int K|u|^N$ 也是 G 不变的.

引理 8.16 设 Φ 是 $H^1(M)$ 上的 G 不变可微泛函，设 $\{u_k\} \subset H_G^1(M)$，则 $\|\Phi'(u_k)\|_{H_G^{-1}} \to 0$ 的充分必要条件是 $\|\Phi'(u_k)\|_{H^{-1}} \to 0$.

证明 因 H_G^1 是 H^1 的闭子空间，对于任意 $f \in H^1$，我们有直和分解

$$f = f_G + f_G^{\perp},$$

其中 $f_G \in H_G^1$，$f_G^{\perp} \in \big(H_G^1\big)^{\perp}$. 因 H_G^1 是 Hilbert 空间，根据 Riesz 表示定理，我们可以将 $\Phi'(u_k)$ 看作 H_G^1 中的点，因而 $\langle \Phi'(u_k), f_G^{\perp} \rangle = 0$. 于是

$$\langle \Phi'(u_k), f \rangle = \langle \Phi'(u_k), f_G \rangle,$$

引理由此得证. □

2. G **自由作用于** $\mathbb{S}^n$.

在本小节，我们假定 $G \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{S}^n)$ 是有限群，$\mathbb{S}^n$ 上的光滑函数 K 在 G 作用下不变.

如果 G 自由地作用于 $\mathbb{S}^n$ 上 (即 G 中除了恒同映射，其余均没有不动点)，那么 $M = \mathbb{S}^n/G$ 是一个 n 维紧致流形 (见陈维桓李兴校 [220]). 记 K' 为 K 的商映射，那么 Nirenberg 问题化归为 (M, g_0) 上的设定数量曲率问题. (M, g_0) 局部共形平坦，而且不共形等价于 $(\mathbb{S}^n, g_0)$，应用 Escobar-Schoen 定理 8.10，可获得如下结论.

定理 8.17 设非平凡等距群 $G \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{S}^3)$ 自由地作用于 $\mathbb{S}^3$ 上. $\mathbb{S}^3$ 上的光滑函数 K 满足: 1) $\sup K > 0$; 2) K 在 G 作用下不变. 则 K 是某个共形度量 $g \in [g_0]$ 的数量曲率.

同样的结论在 $(\mathbb{S}^n, g_0)$ ($n \geq 4$) 上也成立，如果 K 还在它的某个最大值点处具 $(n-2)$ 阶平坦.

然而，要求 G 自由地作用于 $\mathbb{S}^n$，这样的条件是相当苛刻的. 当 n 是偶数时，这样的群只有一个，它由恒同映射与对径映射构成.

特别，当 $n = 2$ 时，$\mathbb{S}^2/G = \mathbb{R}P^2$. 因为 $\mathbb{R}P^2$ 上的任何函数提升到 $\mathbb{S}^2$ 上均满足对称性条件 $u(-x) = u(x)$，由 Moser 定理 8.3 便得到下列推论.

推论 8.18 (J. Moser [152]) 设 $\widetilde{R} \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ 满足 $\widetilde{R}(-x) = \widetilde{R}(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{S}^2$, 且 $\sup \widetilde{R} > 0$, 则 $\widetilde{R}$ 必是某个共形度量 $\tilde{g} = e^u g_0$ 的数量曲率, 且 $u(-x) = u(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{S}^2$.

3. **情形** $\mathrm{Card}\, O_G^x = \infty$.

当 $\mathrm{Card}\, O_G^x = \infty$ 对每个 $x \in \mathbb{S}^n$ 成立时，更强的结论是 Hebey-Vaugon [115] 关于对称函数的 Sobolev 嵌入定理所给出的推论.

定理 8.19 (Hebey-Vaugon [115]) 设 (M, g) 是紧致 n 维 Riemann 流形, 设 $G \subset \mathrm{Isom}(M)$ 是紧子群. 如果对于每一个 $x \in M$, 基数 $\mathrm{Card}\, O_G^x = \infty$, 令 $k = \min\limits_{x \in M} \dim O_G^x$, 那么 $k \geq 1$, 并且

(i) 如果 $n - k \leq 2$, 则对于任意实数 $p \geq 1$, 嵌入 $H_G^1(M) \hookrightarrow L^p(M)$ 连续、紧致.

(ii) 如果 $n-k>2$，则对于 $1\le p\le \frac{2(n-k)}{n-k-2}$，嵌入 $H_G^1(M)\hookrightarrow L^p(M)$ 连续，而当 $p<\frac{2(n-k)}{n-k-2}$ 时嵌入紧致.

在上述定理中，将 M 换为完备 Riemann 流形，那么同样结论对于 $\mathring{H}_G^1(\Omega)$ 成立，其中 $\Omega\subset M$ 是紧区域. 定理 8.19 是早期丁伟岳 [87] 及 P.L. Lions [138] 等结果的推广.

因为 $k\ge 1$，所以 $N<\frac{2(n-k)}{n-k-2}$，故有紧嵌入 $\mathring{H}_G^1(M)\hookrightarrow L^N(M)$. Hebey-Vaugon 定理便意味着问题 (8.22b) 的存在性定理.

介于“G 有限且 G 自由作用于 $\mathbb{S}^n$”与“$\mathrm{Card}\,O_G^x=\infty$”，Hebey 等作者有许多中间结论，参见 Aubin [6].

三、拓扑方法

1. **Bahri-Coron 定理.** 在 Nirenberg 问题的研究方面，特别引人入胜的是 Bahri-Coron [32] 关于三维标准球面的结果. Bahri-Coron [32] 将 (8.32) 解的存在性归结为 K 的 Morse 指标的计数问题.

设 f 是 n 维流形 M 上的 C^3 函数，我们说 f 在临界点 P 处非退化，如果在局部坐标系下，二阶偏导数构成的 Hesse 矩阵 $\left(\partial_i\partial_j f\right)_{n\times n}$ 在 P 处非奇异. 非奇异 Hessian 负特征值的个数称为 f 在 P 处的 Morse 指标.

例如，$x=0$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上函数 $f(x)=-x_1^2-x_2^2+x_3^2$ 的非退化临界点，其 Morse 指标 $\mathrm{ind}(0)=2$.

定理 8.20 (Bahri-Coron [32]) 设 K 是标准三维球面 $(\mathbb{S}^3,g_0)$ 上的正值光滑函数，K 的每一个临界点 Q 均非退化且 $\Delta K(Q)\ne 0$. 如果

$$\sum_{Q\in K^c,\ -\Delta K(Q)>0}(-1)^{\mathrm{ind}(Q)}\ne -1, \tag{8.31}$$

则 K 是某个共形度量 $g\in[g_0]$ 的数量曲率. K^c 为 K 的临界点集.

A. Bahri 与 J.M. Coron 在证明他们的定理时将 Nirenberg 方程 (8.22a) 写为

$$-8\Delta u+6u=Ku^5,\ u>0 \quad 在\ \mathbb{S}^3\ 上, \tag{8.32}$$

它的变分泛函为

$$J(u)=\frac{1}{3}\left[\int Ku^6\mathrm{d}V\right]^{-1/2},\quad u\in\Sigma^+,$$

其中 $\Sigma^+ = \{u \in \Sigma : u \geq 0\}$，而 Σ 是 Hilbert 流形

$$\Sigma = \left\{u \in H^1 : 8\|\nabla u\|_2^2 + 6\|u\|_2^2 = 1\right\}.$$

易见 J 是 C^2 泛函，在 Σ^+ 上，

$$J'(u) = \lambda(u)\Big(u - \lambda^4(u)L^{-1}Ku^5\Big), \quad u \in \Sigma^+,$$

其中 $Lu = -8\Delta u + 6u$ 是共形 Laplacian，$\lambda(u) = 9J^2(u)$.

当然，J 在 Σ^+ 上不满足 Palais-Smale 条件. Bahri-Coron [32] 详细研究了 J 的 Palais-Smale 序列的行为.

对于 $a \in \mathbb{S}^3$ 及实数 $\lambda > 0$，引进函数

$$\delta(a,\lambda) = c_0\left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + 1 + (\lambda^2 - 1)\cos d(a,x)}\right)^{1/2},$$

其中 $d(a,x)$ 表示 a 与 x 间测地线的长度. $\delta(a,x)$ 是 $(\mathbb{S}^3, g_0)$ 上 Yamabe 方程的解，即 $-8\Delta\delta(a,\lambda) + 6\delta(a,\lambda) = \delta(a,\lambda)^5$.

给定 $\varepsilon > 0$ 充分小及正整数 $p \geq 1$，记

$$\begin{aligned} W(p,\varepsilon) = \Big\{ & u \in \Sigma^+ : \exists\,\alpha_1, \cdots, \alpha_p > 0; \exists\, a_1, \cdots, a_p \in \mathbb{S}^3, \\ & \exists\,\lambda_1, \cdots, \lambda_p > 1/\varepsilon \text{ 满足:} \\ & \Big\|u - \sum\nolimits_1^p \alpha_i\delta_i\Big\|_{H^1} < \varepsilon;\ \big|\alpha_i^4 K(a_i)\lambda(u) - 1\big| < \varepsilon,\ \forall\, i; \\ & \varepsilon_{ij}^{-1} \triangleq \frac{\lambda_i}{\lambda_j} + \frac{\lambda_j}{\lambda_i} + \lambda_i\lambda_j d(a_i,a_j)^2 > \frac{1}{\varepsilon}, \forall\, i \neq j \Big\}. \end{aligned}$$

其中 $\delta_i = \delta(a_i, \lambda_i)$.

命题 8.21 设 $\{u_k\} \subset \Sigma^+$ 满足 $J'(u_k) \to 0$ 且 $J(u_k)$ 有界. 那么，存在整数 $p \geq 1$，数列 $\varepsilon_k > 0$ $\varepsilon_k \to 0$，以及 $\{u_k\}$ 的子列 (仍记为 $\{u_k\}$)，使得 $u_k \in W(p, \varepsilon_k)$，而 $J(u_k)$ 则收敛于一个实数 l，且 $l \leq p\big(\int \delta^6 \mathrm{d}V/(3\sqrt{\min K})\big)$.

为完成定理 (8.20) 的证明，Bahri-Coron [32] 用反证法，假设问题 (8.32) 无解. 讨论 J 的下降流线

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = -J'(u),\ s \geq 0, \quad u|_{s=0} = u_0 \in \Sigma^+.$$

首先，容易看出，J 沿着下降流线有界并且当 $s \to +\infty$ 时，$J'(u)(s) \to 0$.

Bahri-Coron [32] 详细分析了下降流的行为，并证明，对于 $\varepsilon > 0$ 充分校如果 $p \geq 2$，那么 J 沿着下降流在 $W(p,\varepsilon)$ 上满足 Palais-Smale 条件；如果 $u_0 \in W(1,\varepsilon)$，那么 J 沿着下降流将发生凝聚，使得当 $s \to +\infty$ 时

$$|\nabla u(s)|^2 \xrightarrow{w} C_0\delta_{y_0}, \quad |u(s)|^N \xrightarrow{w} C_1\delta_{y_0},$$

其中收敛是测度的弱收敛. 凝聚点 $y_0 \in \mathbb{S}^3$ 都是 K 的临界点，满足

$$\nabla K(y_0) = 0, \quad -\Delta K(y_0) > 0. \tag{8.33}$$

基于这些事实及另外一些更细致的硬性估计，A. Bahri 与 J.M. Coron 建立了证明他们定理所需的形变引理.

将符合条件 (8.33) 的凝聚点 y_j $(1 \leq j \leq s)$ 按 K 的取值大小排列，令

$$c_j = \frac{1}{3\sqrt{K(y_j)}} \int \delta^6 \mathrm{d}V \leq c_{j+1},$$

注意，$c_1 = \inf\limits_{u \in \Sigma^+} J(u)$. 简单起见，设诸 c_j 互不相等，在 c_j 之间插入一串正数，

$$a_1 < c_1 < a_2 < c_2 < \cdots < a_j < c_j < a_{j+1} < \cdots < a_s < c_s < a_{s+1},$$

Bahri-Coron [32] 最终证明，

$$J^{a_{s+1}} \text{ 是 } \Sigma^+ \text{ 的形变收缩核,} \tag{8.34}$$

$$H_q(J^{a_{j+1}}, J^{a_j}) = 0 \quad \text{若 } q \neq 3 - \operatorname{ind}(y_j), \tag{8.35}$$

$$H_q(J^{a_{j+1}}, J^{a_j}) = \mathbb{Z} \quad \text{若 } q = 3 - \operatorname{ind}(y_j). \tag{8.36}$$

其中 $J^b = \{u \in \Sigma^+ : J(u) \leq b\}$ 是水平集，$H_q(J^{a_{j+1}}, J^{a_j})$ 是 q 阶相对同调群.

代数拓扑学表明：设 (X, A) 是拓扑空间偶 (即 $A \subset X$)，$\chi(X)$ 及 $\chi(X, A)$ 表示 X 及 (X, A) 的 Euler-Poincaré 示性数，则

$$\begin{aligned}
&\chi(\emptyset) = 0, \quad \chi(P_0) = 1 \ (P_0 \text{ 是独点}),\\
&\chi(X) = \chi(A) + \chi(X, A),\\
&\chi(X, A) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q \rho(\, H_q(X, A)\,),
\end{aligned}$$

其中 $\rho(G)$ 表示群 G 的秩.

因 Σ^+ 可缩，由 (8.34)，$\chi(J^{a_{s+1}}) = \chi(\Sigma^+) = 1$. 此外，$\chi(J^{a_1}) = \chi(\emptyset) = 0$. 最后，依据 (8.35) 及 (8.36)

$$\chi(J^{a_{j+1}}) = \chi(J^{a_j}) + (-1)^{3-\mathrm{ind}(y_j)}.$$

将以上诸式相加得

$$1 = \sum_{j=1}^{s}(-1)^{3-\mathrm{ind}(y_j)},$$

但这与定理的指标计数条件 (8.39) 矛盾. 故问题 (8.32) 有解.

2. 张-杨摄动定理.

张圣容 (Sun-Yung Alice Chang) 和杨健平(Paul C. Yang) 在文献 Chang-Yang [71] 给出 $n \geq 2$ 维 Nirenberg 问题的一个摄动结论.

受 Kazdan-Warner 障碍恒等式的启发，Chang-Yang [71] 引进一个拓扑度条件，在此条件下，如果 K 充分接近常数，则 Nirenberg 问题 (8.22) 可解. 解决问题的关键是下文所述的映射 G，它由 K 定义.

给定 $P \in \mathbb{S}^n$，将 P 作为北极 $P(0, \cdots, 0, 1)$，由北极发出的球极投影 π 将 $\mathbb{S}^n - P \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 映为赤道平面 $\mathbb{R}^n$，记 $y = \pi(x)$. 对于 $t \geq 1$，令 $\phi_{P,t}(y) = ty$，则 $\phi_{P,t}$ 是 $\mathbb{S}^n$ 上的共形变换. 映射集合 $\{\phi_{P,t} : t \geq 1, P \in \mathbb{S}^n\}$ 与单位球 $B = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : |p| < 1\}$ 微分同胚. 确实，$(s, P) = (\frac{t-1}{t}, P)$ 是 B 的极坐标，$t = 1$ (对应原点 $s = 0$) 与恒等映射对应. 定义映射 $G : B \to \mathbb{R}^{n+1}$ 为

$$G(P,t) = \int \left(K \circ \phi_{P,t}\right)\vec{x}\,\mathrm{d}V, \tag{8.37}$$

定义 8.1 我们说 K 在 $P \in K^c$ 处满足 k 阶 Chang-Yang 非退化条件，如果 K 在 P 处的直到 $(k-1)$ 阶导数等于零，且存在常数 $c > 0$ 使得对于 t 充分大，

$$|G(P,t)| \geq \begin{cases} ct^{-k}, & \text{如果 } k < n, \\ ct^{-n}\log t, & \text{如果 } k = n. \end{cases} \tag{8.38}$$

可以验证，对于临界点 $P \in K^c$，当 $\Delta K(P) \neq 0$ 时，P 是 2 阶 Chang-Yang 非退化的.

定理 8.22 (Chang-Yang [71]) 设 K 是 $(\mathbb{S}^n, g_0)$ $(n \geq 2)$ 上的光滑函数，其每一个临界点 k 阶非退化，$k \leq n$ 如果 n 为偶数，$k \leq n-1$ 如果 n 为奇数. 假定映射 $G : B \to \mathbb{R}^{n+1}$ 的拓扑度 $\deg(G, B, 0) \neq 0$，则存在常数 $\varepsilon(n) > 0$，使得当 K 满足 $\sup|K-1| < \varepsilon(n)$ 时，K 是某个共形度量 $g \in [g_0]$ 的数量曲率.

注记 8.2 如果 K 的每个临界点 $Q \in K^c$ 按通常意义均非退化，Chang-Gursky-Yang [68] 指出，指标计数条件

$$\sum_{Q \in K^c,\, -\Delta K(Q)>0} (-1)^{\mathrm{ind}(Q)} \neq (-1)^n \tag{8.39}$$

隐含定理 8.22 中的拓扑度条件 $\deg(G, B, 0) \neq 0$.

证明 这里只给出 Chang-Yang [71] 的证明思路. 首先，对于每一个 $p = \frac{t-1}{t} P \in B$，令 $K_p = K \circ \phi_{P,t}$，关于 K_p 应用 Aubin 的 Fredholm 型定理 ($n = 2$ 时为定理 8.14，$n \geq 3$ 时为定理 8.15)，存在 $\Lambda_p \in \mathbb{R}^{n+1}$，以及 $\mathbb{S}^n$ 上的光滑函数 u_p ($n \geq 3$ 时 $u_p > 0$)，满足

$$-\Delta u_p + 2 = \big(K_p - \Lambda_p \cdot x\big) e^{u_p}, \qquad (n = 2), \tag{8.40a}$$

$$-\Delta u_p + \kappa u_p = \big(K_p - \Lambda_p \cdot x\big) u_p^{N-1}, \quad (n \geq 3). \tag{8.40b}$$

(8.40b) 的成立是因为 K 从而 K_p 可以充分接近常数.

从定理 8.14 及 8.15 的证明知，u_p 是泛函 J_n 在 $\mathscr{B}_n$ 上的极小值点. 其中

$$J_2(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^2 \mathrm{d}V + 2 \int_{\mathbb{S}^2} u \,\mathrm{d}V,$$

$$J_n(u) = \Big[\|\nabla u\|_2^2 + \kappa \|u\|_2^2\Big] \Big[\int K_p |u|^N\Big]^{-2/N}, \quad n \geq 3,$$

而

$$\mathscr{B}_2 = \Big\{u \in H^1 : \int K_p e^u = 8\pi, \ \int e^u x = 0\Big\},$$

$$\mathscr{B}_n = \Big\{u \in H^1 : \int u^N x = 0, \ u \neq 0\Big\}, \quad n \geq 3.$$

Chang-Yang [71] 证明，只要 $\varepsilon(n)$ 充分小，(8.40b) 中的极小解 u_p 就是唯一的，这一点的证明是通过反证法完成的. 假设 J_n ($n \geq 3$) 有两个极小值点 u_p 及 $\tilde{u}_p$，用参数曲线将它们联结起来：令 $u_\lambda^N = \lambda \tilde{u}_p^N + (1-\lambda) u_p^N$，并证明函数 $\lambda \mapsto J(u_\lambda)$ 是凸函数. (8.40a) 的情形类似. 应用隐函数定理可证明 u_p 及 Λ_p 关于 p 连续.

如果对于某个 $q \in B$，有 $\Lambda_q = 0$，那么 u_q 满足

$$-\Delta u_q + 2 = K_q e^{u_q}, \qquad (n = 2), \tag{8.41a}$$

$$-\Delta u_q + \kappa u_q = K_q u_q^{N-1}, \quad (n \geq 3). \tag{8.41b}$$

记 $\phi_q = \phi_{Q,t}$，其中 $q = \frac{t-1}{t}Q$，那么

$$u = \big(u_q - \log|\det D\phi_q|\big) \circ \phi_q^{-1}, \quad n = 2,$$
$$u = \big(u_q |\det D\phi_q|^{N-1}\big) \circ \phi_q^{-1}, \qquad n \geq 3$$

分别是方程 (8.22a) 及方程 (8.22b) 的解.

为完成证明，假定 $\Lambda_p \neq 0$，定义映射 $\Lambda: B \to \mathbb{R}^{n+1}$ 为 $\Lambda(p) = \Lambda_p$. Chang-Yang [71] 证明，在定理所述非退化条件下，对于 t 充分大，也就是 $p = \frac{t-1}{t}P$ 充分接近边界 ∂B，映射 $G(p) = G(P,t) \neq 0$，并且

$$\deg(\Lambda, B, 0) = \deg(G, B, 0). \tag{8.42}$$

故由定理的条件得 $\deg(\Lambda, B, 0) \neq 0$，这与假设 $\Lambda_p \neq 0$ 矛盾. □

3. Chang-Gursky-Yang 定理.

当 $n = 2$ 或 $n = 3$ 时，Chang-Gursky-Yang [68] 将定理 8.22 中 “K 接近常数” 的限制去掉，得到如下两个定理.

定理 8.23 (Chang-Gursky-Yang [68]) 设 $K > 0$ 是 $(\mathbb{S}^2, g_0)$ 上的光滑函数，其每一个临界点 $Q \in K^c$ 均满足 $\Delta K(Q) \neq 0$，如果由 (8.37) 定义的映射 G 的拓扑度 $\deg(G, B, 0) \neq 0$，则 K 是某个共形度量 $g \in [g_0]$ 的数量曲率.

定理 8.24 (Chang-Gursky-Yang [68]) 设 $K > 0$ 是 $(\mathbb{S}^3, g_0)$ 上的光滑函数，其每一个临界点 $Q \in K^c$ 均满足 $\Delta K(Q) \neq 0$，如果由 (8.37) 定义的映射 G 的拓扑度 $\deg(G, B, 0) \neq 0$，则 K 是某个共形度量 $g \in [g_0]$ 的数量曲率.

以定理 8.24 为例，我们给出 Chang-Gursky-Yang [68] 的证明思路. 考虑一族带参数 $s \in [0,1]$ 的方程

$$-\Delta u + \kappa u = K_s u^5, \tag{8.43}$$

其中 $K_s = sK + (1-s)\kappa$，如果 s 充分小，应用定理 8.22，方程 (8.43) 有一解. Chang-Yang [71] 证明，只要 $s > 0$ 充分小，解就唯一. 于是，对于 $s_0 > 0$ 充分小，得到 (8.43) 的唯一解 u_{s_0}. 接下来的任务是证明方程 (8.43) 在区间 $s \in [s_0, 1]$ 上有解.

K_s 与 K 有相同的临界点，在 K^c 上，$|\Delta K_s(Q)| \geq s_0|\Delta K(Q)| \geq \varepsilon$. 此外，由于 $K > 0$，故存在与 s 无关的正数 m, M，满足 $m \leq K_s \leq M$. 据此，[68] 给

出方程 (8.43) 解的先验估计 (这是最难的部分)

$$\|u_s\|_{2,\alpha} \leq C, \quad C^{-1} < u < C, \tag{8.44}$$

C 与 s 无关. 令

$$\Omega = \left\{u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^3) : C^{-1} < u < C, \ \|u\|_{2,\alpha} < C\right\},$$

考虑映射 $\Psi_s : \Omega \to C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^2)$:

$$\Psi_s(u) = u - \Box^{-1}\left(K_s u^5\right),$$

Ψ_s 是全连续场. 将方程 (8.43) 改写为 $\Psi_s(u) = 0$. 取 C 充分大, 则对于 $s \geq s_0$, 有 $0 \notin \Psi_s(\partial\Omega)$, 因而拓扑度 $\deg(\Psi_s, \Omega, 0)$ 有定义且不依赖于 $s \geq s_0$.

最后, Chang-Gursky-Yang [68] 证明

$$\deg(\Psi_{t_0}, \Omega, 0) = \deg(\Lambda, B, 0),$$

但因 (8.42), 我们有 $\deg(\Lambda, B, 0) = \deg(G, B, 0) \neq 0$, 所以 $\deg(\Psi_1, \Omega, 0) = \deg(\Psi_{t_0}, \Omega, 0) \neq 0$, 这就证明 $\Psi_1(u) = 0$ 有解.

注记 8.3 根据注记 8.2, 定理 8.24 是 Bahri-Coron 定理的推广, Chang-Gursky-Yang 定理允许 K 有退化临界点.

4. 其他结论.

当 $n = 2$ 时, 张恭庆与刘嘉荃在 Chang-Liu [67] 中给出了一个更直接的拓扑度条件, 在该条件下二维 Nirenberg 问题有解.

定理 8.25 (Chang-Liu [67]) *设 K 是 $\mathbb{S}^2$ 上的光滑函数, $\sup K > 0$. 令 $\Omega = \{x \in \mathbb{S}^2 : K(x) > 0 \text{ 且 } -\Delta K(x) > 0\}$. 假定当 $\Delta K = 0$ 或 $K = 0$ 时, $|\nabla K| \neq 0$. 如果 $\deg(\Omega, \nabla K, 0) \neq 1$, 则 K 是某个共形度量 $g \in [g_0]$ 的数量曲率.*

可以说, Bahri-Coron 定理 8.20 及 Chang-Gursky-Yang 定理 8.24 基本上解决了三维 Nirenberg 问题; 而 Chang-Gursky-Yang 定理 8.23 及张-刘定理 8.25 则基本解决了二维 Nirenberg 问题.

与二维、三维不同, $n \geq 4$ 维 Nirenberg 问题更加复杂, 深层次原因见 Bahri [28] 的论述. 部分结论见 Bahri-Coron [32] 附录, Bahri [28], Y.Y. Li [134].



凝聚紧性原理

第九章 凝聚紧性原理 I

从本章开始，讨论凝聚紧性原理 (concentration compactness principle). 凝聚紧性原理是数学分析的重要方法，自上个世纪 80 年代中期 P.L. Lions [140, 141] 的一系列开创性工作以来，得到了广泛深入的发展和应用 (见 Bahri [28, 29], Struwe [192], Bahri-Coron [31, 32] 等).

凝聚紧性原理，主要用于处理一类泛函的临界点问题，这些泛函不满足紧性条件. 一般来说，如果 Banach 空间 E 上的 C^1 泛函 J 在非紧致群 G 作用下保持不变，即

$$J(g\circ u)=J(u),\quad \forall\, u\in E,\ g\in G$$

则这样的泛函不满足紧性条件，经典的变分法便不能直接应用.

对于欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上的函数空间 (比如齐次 Sobolev 空间 $\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$) 来说，有两类典型的非紧致作用，一是平移变换，即

$$\tau_h\circ u=u(\cdot+h)\quad (h\in\mathbb{R}^n).$$

如果泛函 J 具有平移不变性，那么 J 的 (PS) 序列就可能在无穷远处发生凝聚，处理这类现象的一套变分方法，将称之为第一类凝聚紧性原理，它的核心内容是引理 9.1. 根据这个引理，$\mathbb{R}^n$ 上任何一个 L^1 序列，通过适当抽子列，有三种可能：消逝、两分或经一列平移变换后胎紧.

具平移不变性的变分问题，若具有某种内在的有机结构 (例如满足次可加条件)，则其变分序列 (极小化序列或 (PS) 序列) 按 L^p 意义就不会消逝也不发生两分，这样平移后便得到一个 L^p 胎紧序列. 如果问题还具有局部紧致性 (例如限制在 $W^{m,p}(\Omega)$ 上满足紧性条件)，则此时变分序列将收敛到问题的解.

本章讨论的变分问题都具有局部紧致性.

$\mathbb{R}^n$ 的函数空间上，另一个典型的非紧致作用是伸缩变换，即

$$\delta_\lambda \circ u = \lambda^\alpha u(\lambda\cdot) \quad (\lambda > 0),$$

α 是与 λ 无关的常数. 具伸缩不变性的变分问题，甚至在局部也不满足紧性条件，它的变分序列有可能在有限点发生凝聚，处理这类现象的一套变分方法，将称之为第二类凝聚紧性原理，将在下一章讨论.

第一节　经典形式

一、L^1 序列的胎紧 两分与消逝

现在，我们将讨论 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中有界序列 $\{\rho_k\}$ 的一系列性质. 我们设 $\rho_k \geq 0$，且满足

$$\|\rho_k\|_{L^1} = \lambda + o(1), \quad \lambda > 0. \tag{9.1}$$

定义 9.1 (胎紧 tightness) 满足 (9.1) 的非负序列 $\{\rho_k\}$ 称为一个 胎紧序列，如果$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, R > 0$，使得

$$\int_{|x|\geq R} \rho_k(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon, \quad \forall\, k \geq 1. \tag{9.2}$$

称 u_k 是一个L^p 胎紧序列，如果 $|u_k|^p$ 是一个胎紧序列.

胎紧列定义中，条件 (9.2) 说的是序列 $\{\rho_k\}$ 在无穷远处是平等可积的.

这里，$\mathbb{R}^n$ 上的平等可积性指的是：$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$，使得对所有可测集 $E \in \mathbb{R}^n$，只要 $m(E) < \delta$，就有

$$\int_E |\rho_k| \leq \varepsilon, \quad \forall\, k \geq 1.$$

定义 9.2 (消逝 vanishing) 满足 (9.1) 的非负序列 ρ_k 称为发生 消逝，如果对于任意的 $t > 0$,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{y+B_t} \rho_k\,\mathrm{d}x = 0.$$

例 9.1 $\rho_k(x) = (1/k)\chi_{[0,\,k]}$ 是一个发生消逝的 $L^1(\mathbb{R}^1)$ 序列，其中 $\chi_{[a,b]}$ 是区间 $[a,b]$ 的特征函数.

定义 9.3 (两分 dichotomy) 满足 (9.1) 的非负序列 ρ_k 称为发生两分，如果存在 $\alpha \in (0,\ \lambda)$ 及函数列 ρ_k^1, $\rho_k^2 \in L_+^1(\mathbb{R}^n)$，使得

$$\begin{cases} \left\|\rho_k - (\rho_k^1 + \rho_k^2)\right\|_{L^1} = o(1), \\ \left\|\rho_k^1\right\|_{L^1} = \alpha + o(1), \quad \left\|\rho_k^2\right\|_{L^1} = \lambda - \alpha + o(1), \\ \operatorname{dist}(\operatorname{sppt}\rho_k^1,\ \operatorname{sppt}\rho_k^2) \to \infty. \end{cases}$$

例 9.2 $\rho_k(x) = \frac{1}{2}\chi_{[0,1]} + \frac{1}{2}\chi_{[k,k+1]}$ 是一个两分的序列.

例 9.3 $\rho_k(x) = \frac{1}{2k}\chi_{[0,k]} + \frac{1}{2}\chi_{[0,1]}$ 也是一个两分的例子.

二、核心引理

引理 9.1 (P. L. Lions [140]) 设 $\rho_m \geq 0$ 是 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中的序列，满足条件 (9.1)，则必存在 ρ_m 的子列 ρ_k，出现下列三种互斥的可能:

(α) 要么 ρ_k 发生消逝;

(β) 要么 ρ_k 发生两分;

(γ) 或者存在点列 $y_k \in \mathbb{R}^n$，使得序列 $\widetilde{\rho}_k = \rho_k(\cdot + y_k)$ 胎紧.

在给出引理 9.1 证明之前，我们需要一个数学分析中的引理.

引理 9.2 (Helley) 设 $\{f_k\}$ 是实区间 I 上的有界变差函数列，一致有界且全变差 $BV(f_k) \leq C$ 一致有界，则存在 $\{f_k\}$ 的子列，它逐点收敛于一个有界变差函数 f，且 $BV(f) \leq C$.

证明 因为任意一个有界变差函数都是两个单增函数的差，不妨设 $\{f_m\}$ 是区间 I 上的有界单增函数列. 任选 I 的一可数稠密子集，使其包含所有 $f_m\,(m \geq 1)$ 的不连续点，记这样的点集为 S. 应用对角线原理，可抽得 $\{f_m\}$ 的子列 $\{f_k\}$，使得对于任意 $r \in S$ 均成立 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(r) = c_r$. 对 $x \in I$，令

$$f(x) = \inf\{c_r : S \ni r \geq x\}.$$

显然 $f(x)$ 为单增函数且对于 S 中的 r，$f(r)=c_r$.

根据 Dini 定理 (见《微积分学教程》)，我们可证明，在 f 的连续点，$f_k(x)$ 收敛于 $f(x)$. 由于 f 的间断点是至多可列点集，应用对角线抽子列的方法，我们可以在这些点改变 $f(x)$ 的定义，使得 $f_k(x)$ 在间断点也收敛于 $f(x)$. □

引理 9.1 的证明 不失一般性，不妨在 (9.1) 中设 $o(1)=0$.

引理证明的关键是考察所谓凝聚函数的特性. 凝聚函数的概念可追溯到 1954 年 Lévy [132] 的工作. ρ_k 的凝聚函数定义为

$$Q_k(t)=\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{y+B_t}\rho_k(x)dx.$$

函数列 $Q_k(t)$ 关于 t 在区间 $[0,\infty)$ 上单增，对于 $k\geq 1$ 一致有界 $Q_k(t)\leq\lambda$，且 $\lim\limits_{t\to\infty}Q_k(t)=\lambda$. 根据 Helley 引理，存在函数列 $Q_k(t)$ 的子列 (仍记为 $Q_k(t)$) 及 $[0,\infty)$ 上的单增函数 $Q(t)$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}Q_k(t)=Q(t),\ \forall t\geq 0.$$

记
$$\alpha=\lim_{t\to\infty}Q(t),$$
则
$$0\leq\alpha\leq\lambda.$$

根据极限 α 的不同取值，分三种情况，我们将证明：当 $\alpha=0$ 时就出现情形 (α)，当 $0<\alpha<\lambda$ 时就出现情形 (β)，而当 $\alpha=\lambda$ 时则出现情形 (γ).

当 $\alpha=\lambda$ 时，由于 $\lim\limits_{t\to\infty}Q(t)=\lambda$，所以对于给定 $\varepsilon>0$，存在正数 $R=R(\varepsilon)$ 使得 $Q(R)\geq\lambda-\varepsilon$. 从 $\lim\limits_{k\to\infty}Q_k(R)=Q(R)$ 知，$\exists\, K=K(\varepsilon)$ 使得

$$Q_k(R)\geq Q(R)-\varepsilon\geq\lambda-2\varepsilon,\quad \forall\, k\geq K. \tag{9.3}$$

对于满足 $k<K$ 的有限个 k，由于 $\lim\limits_{R\to\infty}Q_k(R)=\lambda$ 及 $Q_k(t)$ 的单调性，可适当放大 R (仍写为 R)，使得 (9.3) 式对于所有 k 成立. 即

$$Q_k(R)=\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{y+B_{R(\varepsilon)}}\rho_k(x)dx\geq\lambda-2\varepsilon,\quad \forall\, k\geq 1.$$

故存在 $y_k(\varepsilon)$ 满足

$$\int_{y_k(\varepsilon)+B_{R(\varepsilon)}}\rho_k(x)dx\geq\lambda-3\varepsilon,\quad \forall\, k\geq 1.$$

取 $\varepsilon_0=\lambda/6$，令 $y_k=y_k(\varepsilon_0)$，则对于 $\varepsilon<\varepsilon_0$，由于

$$\int_{y_k+B_{R(\varepsilon_0)}}\rho_k(x)dx+\int_{y_k(\varepsilon)+B_{R(\varepsilon)}}\rho_k(x)dx\geq\lambda,$$

两球 ($y_k+B_{R(\varepsilon_0)}$) 及 ($y_k(\varepsilon)+B_{R(\varepsilon)}$) 必然相交，球心距满足

$$|y_k(\varepsilon)-y_k|\leq R(\varepsilon_0)+R(\varepsilon).$$

取 $R=R(\varepsilon_0)+2R(\varepsilon)$，则 $\{y_k+B_R\}\supset\{y_k(\varepsilon)+B_{R(\varepsilon)}\}$. 如此我们找到了 $\mathbb{R}^n$ 中的一列点 y_k，使得对于任给 $\varepsilon\in(0,\lambda/6)$ 都有 $R=R'(\varepsilon)$ 满足

$$\int_{y_k+B_R}\rho_k(x)dx\geq\lambda-3\varepsilon,\quad\forall\,k\geq1.$$

若令 $\widetilde{\rho}_k=\rho_k(\cdot+y_k)$，则 $\widetilde{\rho}_k$ 胎紧. 这样便证明了情形 (γ).

当 $\alpha=0$ 时，按 $Q(t)$ 的定义及其单增的特性，

$$0\leq Q(t)\leq\lim_{t\to\infty}Q(t)=0,$$

即 $Q(t)=0$，这便是情形 (α) 的结论.

最后，当 $0<\alpha<\lambda$ 时，我们要证明结论 (β). 给定 $\varepsilon>0$，取 $R>0$ 使得 $Q(R)>\alpha-\varepsilon$，对于足够大的 k ($k\geq K$) 有 $Q_k(R)\in(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$. 取一列正数 $R_k\to\infty$ 使得 $Q_k(R_k)\leq\alpha+\varepsilon$. 于是 $k\geq K$ 时，存在 $y_k\in\mathbb{R}^n$ 满足

$$\int_{y_k+B_R}\rho_k(x)dx\;\in\;[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon].$$

记 χ_k^1 为集合 y_k+B_R 的特征函数，χ_k^2 为集合 $\mathbb{R}^n\backslash(y_k+B_{R_k})$ 的特征函数，令 $\rho_k^1=\rho_k\chi_k^1$，$\rho_k^2=\rho_k\chi_k^2$，则有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|\rho_k-\rho_k^1-\rho_k^2|&=\int_{R\leq|x-y_k|\leq R_k}\rho_k(x)dx\\&\leq Q_k(R_k)-Q_k(R)+2\varepsilon\\&\leq(\alpha+\varepsilon)-(\alpha-\varepsilon)+2\varepsilon=4\varepsilon.\end{aligned}$$

这样便证明了结论 (β)，从而完成了引理的证明. □

我们看到，用引理 9.1 处理两分颇为不易，而一旦涉及梯度及高阶导数，尽管经典的凝聚紧性原理也有相应的引理 (参见 P.L. Lions [140] 第一部分引理 III.1)，但形式更繁冗. 下节将得出一个简约形式.

第二节　简约形式

自凝聚紧性原理问世，人们便开始了对它进行简化．最早可追溯到 Ben-Naoum et al [36] 及 Bianchi-Chabrowski-Szulkin [45].

一、淡收敛　弱收敛与胎紧收敛

泛函分析中常常将 Banach 空间 E 中的一个序列嵌入到 E 的二次对偶空间，以获得更丰富的信息．我们将 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 等距嵌入到比其二次对偶 $L^1(\mathbb{R}^n)^{**}$ 稍大一点的空间 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$．这个嵌入映射为 $L^1(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto \mu_f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$，其中

$$\mu_f(E) = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x,\ \forall E \text{ Borel 可测}.$$

今后，μ_f 将直接写作 f．在这种记法下，$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 中淡收敛及弱收敛的概念可以照搬到 L^1 序列上来．

1. 淡收敛与弱收敛.

定义 9.4　给定 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中的序列 f_k，我们说 f_k 在 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 中淡（弱）收敛于符号测度 $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$，记为 $f_k \stackrel{v}{\rightharpoonup} \mu$ (相应地 $f_k \stackrel{w}{\rightharpoonup} \mu$)，如果

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi f_k\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi\,\mathrm{d}\mu,\quad \forall\varphi\in C_0(\mathbb{R}^n).$$

（相应地　$\forall\varphi\in C_b(\mathbb{R}^n)$）

一般来说由淡收敛不能推出弱收敛，考虑如下例子．记 $N=\frac{2n}{n-2}$，令

$$u_\varepsilon(x) = \frac{C_0\varepsilon^{(n-2)/2}}{(\varepsilon^2+|x-\mathbb{1}/\varepsilon|^2)^N},$$

其中 $\mathbb{1}=(1,\cdots,1)$，取常数 C_0 使得 $\int|u_\varepsilon|^N=1$，注意 C_0 与 ε 无关．对任意 $\varphi\in C_c(\mathbb{R}^n)$，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi|u_\varepsilon|^N\mathrm{d}x=0,\quad 但\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}|u_\varepsilon|^N\mathrm{d}x=1.$$

说明 $|u_\varepsilon|^N$ 淡收敛于0，但不弱收敛．我们看到，随着 $\varepsilon\downarrow 0$，$|u_\varepsilon|^N$ 的质量凝聚在无穷远点.

2. **胎紧列与弱收敛.**

命题 9.3 设 $f_k \in L^1_+(\mathbb{R}^n)$，且 $\|f_k\|_{L^1} = \lambda + o(1)$，$\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$，则

$$(f_k \xrightarrow{w} \mu) \Longleftrightarrow (f_k \xrightarrow{v} \mu \text{ 且 } f_k \text{ 胎紧}). \tag{9.4}$$

有鉴于此，L^1 序列在 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 中的弱收敛也常称为 胎紧收敛，记为 $f_k \xrightarrow{\text{tight}} \mu$.

证明 根据命题 B.8，$f_k \xrightarrow{w} \mu$ 的充分必要条件是 $f_k \xrightarrow{v} \mu$ 且

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \mathrm{d}x = \mu(\mathbb{R}^n). \tag{9.5}$$

设 $f_k \xrightarrow{w} \mu$，由测度 μ 的有限性及 σ 可加性知，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists R > 0$ 使得

$$\mu(B_R) > \mu(\mathbb{R}^n) - \varepsilon. \tag{9.6}$$

取 $\varphi_R \in C(\mathbb{R}^n : [0,1])$ 使得在 B_R 内 $\varphi = 1$，在 B_{2R} 外 $\varphi = 0$. 我们有，当 $k \to \infty$，

$$\begin{aligned}\int_{B_{2R}} f_k \mathrm{d}x \geq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_R f_k \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_R \mathrm{d}\mu + o(1)\\ &\geq \mu(B_R) + o(1) \geq \mu(\mathbb{R}^n) - \varepsilon + o(1).\end{aligned}$$

因而 f_k 是胎紧列.

反之，假定 $f_k \xrightarrow{v} \mu$ 且 f_k 胎紧，则对于任给 $\varepsilon > 0$，由序列 f_k 的胎紧性，存在 $R > 0$ 使得对所有 $k \geq 1$，

$$\int (1 - \varphi_{B_R}) f_k \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

一方面我们有

$$\mu(\mathbb{R}^n) - \varepsilon \leq \int \varphi_R \mathrm{d}\mu = \lim_k \int \varphi_R f_k \mathrm{d}x \leq \varliminf_k \int f_k \mathrm{d}x$$

另一方面

$$\begin{aligned}\varlimsup_k \int f_k \mathrm{d}x &\leq \varlimsup_k \int \varphi_R f_k \mathrm{d}x + \varlimsup_k \int (1 - \varphi_R) f_k \mathrm{d}x\\ &\leq \int \varphi_R \mathrm{d}\mu + \varepsilon \leq \mu(\mathbb{R}^n) + \varepsilon.\end{aligned}$$

从而 (9.5) 成立. 根据命题 B.8，$f_k \xrightarrow{w} \mu$. □

二、两分的简约表述

1. 约定.　本目需要 Radon 测度的概念，可参见附录 A. 记 $\mathbb{R}^n$ 的单点紧化空间为 $\widehat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$，$\infty$ 的邻域系为 $\{x \in \widehat{\mathbb{R}}^n : |x| > R,\, R > 0\}$. 用带帽的希腊字母 $\hat{\mu}$ 等表示 $\widehat{\mathbb{R}}^n$ 上的测度，裸体希腊字母 μ 等表示如下对应测度，

$$\mu = \hat{\mu} - \mu_\infty \delta_\infty, \tag{9.7}$$

其中 δ_∞ 是质量在 ∞ 处的 Dirac 测度，$\mu_\infty = \hat{\mu}(\infty)$. 而 $\mathbb{R}^n$ 上的测度 μ 将按照 $\mu(\infty) = 0$ 扩张为 $\widehat{\mathbb{R}}^n$ 上的测度.

2. 无 a.e. 收敛的情形.

设 f_k 是非负 L^1 有界列. 现定义 $C(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ 上一列线性泛函：

$$L_k(\varphi) \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, f_k \,\mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, \cdots$$

则 L_k 一致有界. 应用 Alaoglu 定理，存在 L_k 的子列 L_j，使得 L_j 弱* 收敛于 $L \in C(\widehat{\mathbb{R}}^n)^* \cong \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$. 由 Riesz 表示定理，存在 $\hat{\mu} \in \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ 使得

$$\lim_j \int \varphi f_j \,\mathrm{d}x = \int \varphi \,\mathrm{d}\hat{\mu}, \quad \forall\, \varphi \in C(\widehat{\mathbb{R}}^n). \tag{9.8}$$

即 $f_j \xrightarrow{w} \hat{\mu}$ 于 $\mathcal{M}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ 中. 由上式可见 $f_j \xrightarrow{v} \mu$ 于 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 中，并且

$$\mu_\infty \triangleq \hat{\mu}(\infty) = \lim_{R\to\infty} \lim_j \int_{|x|\geq R} f_j \,\mathrm{d}x, \tag{9.9}$$

注意，(9.9) 右端的收敛是抽子列的结果. 特别，在 (9.8) 中取 $\varphi = 1$，便得

$$\|f_j\|_{L^1} = \|\mu\|_{var} + \mu_\infty + o(1). \tag{9.10}$$

概括起来，我们有

引理 9.4　*设序列 $f_k \geq 0$ 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中有界，则存在 f_k 的子列 f_j 及有限 Radon 测度 $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$，使得 $f_j \xrightarrow{v} \mu$ 于 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 中，并且成立 (9.10).*

注记 9.1　在引理 9.4 中，$f_j \xrightarrow{w} \mu$ 于 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 的充分必要条件是 $\mu_\infty = 0$. 如果 $\mu_\infty = 0$，则 f_j 是胎紧列，且胎紧收敛于 μ.

注记 9.2　在引理 9.4 中，f_j 两分的充分必要条件是 $\mu \neq 0$ 且 $\mu_\infty \neq 0$.

注记 9.3 在引理 9.4 中，如果 $\mu = 0$ 且 $\mu_\infty \neq 0$，则有两种可能，一是 f_j 消逝，第 255 页的例 9.1 正是这种情形；另一种可能是 f_j 经过适当平移后胎紧，例如 $L^1(\mathbb{R}^1)$ 中的序列 $f_j = \chi_{[j,j+1]}$.

注记 9.4 一般来说，L^1 中的有界列不弱列紧，但引理 9.4 表明，在更弱的意义下，它具有“淡列紧性”.

3. 有 a.e. 收敛的情形.

引理 9.5 设 u_k 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ ($p \geq 1$) 中的有界序列，$u_k \xrightarrow{\text{a.e.}} u$. 则存在 u_k 的子列 u_j，以及有限正则测度 $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$，使得 $|u_j - u|^p \xrightarrow{v} \nu$，且

$$\|u_j\|_p^p = \|u\|_p^p + \|\nu\|_{var} + \mu_\infty + o(1). \tag{9.11}$$

此处 μ_∞ 由 (9.9) 式定义，但其中 $f_k = |u_k|^p$.

证明 根据引理 9.4 的推导，存在测度 $\hat{\mu}, \hat{\nu} \in \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$，使得通过抽子列成立：$|u_j|^p \xrightarrow{w} \hat{\mu}$，$|u_j - u|^p \xrightarrow{w} \hat{\nu}$. 由 Brezis-Lieb 引理，$\forall \varphi \in C(\widehat{\mathbb{R}}^n)$，有

$$\int |u_j|^p \varphi \mathrm{d}x = \int |u|^p \varphi \mathrm{d}x + \int |u_j - u|^p \varphi \mathrm{d}x + o(1),$$

令 $j \to \infty$，得积分等式 $\hat{\mu}(\varphi) = (|u|^p + \hat{\nu})(\varphi)$. 所涉测度的正则性导致 $\hat{\mu} = |u|^p + \hat{\nu}$，从而 $\mu_\infty = \hat{\mu}(\infty) = \hat{\nu}(\infty)$，$\mu = |u|^p + \nu$，即

$$\hat{\mu} = |u|^p + \nu + \mu_\infty \delta_\infty,$$

上述测度关于 $\varphi = 1$ 积分便得 (9.11). □

注记 9.5 运用 Egrov 定理不难证明，引理 9.5 中的测度 ν 与 Lebegue 测度 $\mathcal{L}$ 互为奇异，即 $\nu \perp \mathcal{L}$.

注记 9.6 在引理 9.5 中，若 $u_k \to u$ 在 $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中，则 ν 是零测度.

第三节 局部紧变分问题举例

一、一般原则

局部紧致的变分问题，其变分序列不包含有限凝聚点，应用凝聚紧性原理的过程，就是排除变分序列 消逝与 两分的过程，如此获得一个胎紧序列. 如果变分问题是平移不变的，则可通过一列平移变换重建紧性；如果变分问题不具有平移不变性，则需附加条件，以便保证变分序列不在无穷远发生凝聚.

局部紧致的变分问题，要排除消逝不是一件愉快的事情. 下列引理仍来自 P.L. Lions [140]，在局部紧致情形，往往可用于排除消逝.

引理 9.6 设 $1 < p \le \infty$，$1 \le q < p^*$. 此处 $p^* = \frac{np}{n-p}$ 如果 $p < n$，$p^* = \infty$ 如果 $p \ge n$. 设序列 u_k 在 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 中有界，序列 ∇u_k 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中有界. 如果存在 $R > 0$ 使得

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{y+B_R}|u_k|^q \to 0,$$

那么，对于 $r \in (q,\, p^*)$，成立 $\|u_k\|_r \to 0$.

证明 这个证明来自原文，注意学习其中的分析技巧. 首先假定序列 u_k 在 L^∞ 中有界，则对任意 $\beta > \min\{q, p^*\}$，我们有

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{y+B_R}|u_k|^\beta \to 0.$$

取定 $\bar q$ 使得 $\bar q > q$，$(q-1)p/(p-1) > q$. 由 Hölder 不等式得

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{y+B_R}|u_k|^{\bar q-1}|\nabla u_k| \to 0.$$

取 $\gamma \in (1, n/(n-1))$，由 Sobolev 嵌入定理

$$\int_{y+B_R}|u_k|^{\bar q\gamma} \le C_0\bigg(\int_{y+B_R}\Big\{|u_k|^{\bar q} + \bar q|u_k|^{\bar q-1}|\nabla u_k|\Big\}\bigg)^{\gamma}.$$

将上式中右端圆括号内的积分关于 $y \in \mathbb{R}^n$ 取上确界并记为 ε_k，则 $\varepsilon_k \to 0$，且

$$\int_{y+B_R}|u_k|^{\bar q\gamma} \le C_0\varepsilon_k^{\gamma-1}\int_{y+B_R}\Big\{|u_k|^{\bar q} + \bar q|u_k|^{\bar q-1}|\nabla u_k|\Big\},$$

用一列半径为 R 的球覆盖 $\mathbb{R}^n$，使得每个点至多被覆盖有限次 m 次，由上式得

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_k|^{\bar{q}\gamma} \le mC_0\varepsilon_k^{\gamma-1}\int_{\mathbb{R}^n}\left\{|u_k|^{\bar{q}}+\bar{q}|u_k|^{\bar{q}-1}|\nabla u_k|\right\} \le C\varepsilon_k^{\gamma-1},$$

由此，在 $\|u_k\|_\infty$ 有界的假设下，我们证明：对于 r 充分大，应用 Hölder 不等式从而对所有 $r>q$，$\|u_k\|_r \to 0$.

一般情形，令 $g_k=\min\{|u_k|, M\}$，令 $f_k=\max\{|u_k|, M\}$. 设 $r\in(q, p^*)$，我们有 $\|g_k\|_r\to 0$. 取 $s\in(r, p^*)$，应用 29 页引理 1.30，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f_k|^r = r\int_M^\infty (f_k)_\sharp(\lambda)\lambda^{r-1}\,\mathrm{d}\lambda \le \frac{1}{M^{s-r}}\int_{\mathbb{R}^n}|u_k|^s,$$

其中 $(f_k)_\sharp$ 是 f_k 的分布函数. 于是

$$\|u_k\|_r^r \le \|g_k\|_r^r + \|f_k\|_r^r \le \|g_k\|_r^r + cM^{r-s},$$

令 $M\to\infty$ 便获证引理. □

在排除两分方面，P.L. Lions 发现了一个条件，严格次可加条件 (见 264 页的条件 (S))，它广泛适用于各种条件极值问题，尤其是 Banach 空间之间最佳嵌入常数之极值函数的存在性问题.

二、一个简单例子

作为一个典型例子，讨论下列标量场方程的正解的存在性：

$$\begin{cases} -\Delta u + u = Ku^{q-1}, \quad u>0, & x\in\mathbb{R}^n, \\ u\to 0, & |x|\to\infty. \end{cases} \tag{9.12}$$

其中 $q\in(2, 2^*)$，K 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数，$K(x)\ge 1$.

对于问题 (9.12) 及其相应推广，历史上有有许多文献研究 (见 Nehari [154]，Ding-Ni [89]，Berestycki-Lions [37] 及其参考文献). 这里仅用来说明如何应用凝聚紧性原理来解决类似的问题.

引进 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 上的如下泛函

$$J(u)=\int_{\mathbb{R}^n}K|u|^q,\quad E(u)=\int_{\mathbb{R}^n}\left(|\nabla u|^2+u^2\right).$$

那么，问题 (9.12) 的解可以通过求解下列极值问题获得：

$$\mu=\inf\{E(u):\ u\in H_0^1,\ J(u)=1.\}. \tag{9.13}$$

因嵌入 $H^1(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ 不紧，故不能通过普通变分法获得 μ 的极值函数.

我们将分两种情况讨论：(i) $K(x)\equiv 1$ 的情形，此时问题 (9.12) 是自治的，平移不变的；(ii) $K(x)\not\equiv$ Const. 的情形，此时问题 (9.12) 是非自治的，不具有平移不变性.

三、平移不变情形

设 $K=1$，在此情形将 $J(u)$ 写为 $I(u)$，与问题 (9.12) 相应的极值问题为

$$\mathcal{I}_\lambda=\inf\{E(u):\ u\in H_0^1,\ I(u)=\lambda\}, \tag{9.14}$$

其中 $\lambda>0$ 是参数. 注意，泛函 $I(u)$ 及 $E(u)$ 都是平移不变的.

之所以讨论带参数 λ 的极值问题，在于 $\mathcal{I}_\lambda$ 满足*严格次可加条件*：

$$\mathcal{I}_{\lambda+\mu}<\mathcal{I}_\lambda+\mathcal{I}_\mu,\quad (\lambda,\ \mu>0). \tag{S}$$

这一性质是显然的，因为我们有 $\mathcal{I}_\lambda=\lambda^{2/q}I_1$，而 $q>2$.

我们需证明 I_1 可被某个函数 $u\in H^1(\mathbb{R}^n)$ 取到，然后，应用 Lagrange 乘数法就得到问题 (9.12) 的一个弱解.

设 $u_k\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 是 I_1 的一个极小化序列，即

$$I(u_k)=\|u_k\|_q^q=1,\qquad E(u_k)=I_1+o(1). \tag{9.15}$$

这里可设 $u_k\geq 0$，否则用 $|u_k|$ 代替，这样做，$I(u_k)$ 及 $E(u_k)$ 均不会改变.

由于嵌入 $H^1(\mathbb{R}^n)\to L^q(\mathbb{R}^n)$ 不紧，泛函 I 在 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 上不是弱连续的，因而 $\mathcal{I}_\lambda$ 的极小化序列 (9.15) 在 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 中未必相对列紧. 我们将运用引理 9.1 重建极小化序列的紧性.

命题 9.7 极值问题 (9.14) 的每一个极小化序列 u_k，经过适当平移 $\widetilde{u}_k=u_k(\cdot+y_k)$，在 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 中相对列紧，因而极值问题 (9.14) 有解.

证明 1° 排除消逝 $|u_k|^q$ 或其子列（仍记为 $|u_k|^q$）不会消逝. 设若不然，那么至少存在一个正数 R 使得

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{y+B_R}|u_k|^q=o(1),$$

根据引理 9.6，有 $r \in (q, 2n/(n-2))$ 使得 $\|u_k\|_r = o(1)$. 由 (9.15) 推出 $\|u_k\|_2$ 有界. 于是由 Hölder 内插不等式推得

$$\|u_k\|_q \le \|u_k\|_r^{1-\theta}\|u_k\|_2^{\theta} = o(1), \quad \theta = \frac{1/q - 1/r}{1/2 - 1/r}.$$

这与 (9.15) 矛盾 (注意 $\lambda > 0$).

2° 排除两分　我们将看到 $\mathcal{I}_\lambda$ 的严格次可加性条件 (S) 可以用来排除两分. 由于 u_k 在 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 中有界，经过抽取子列，我们可假设

$$u_k \xrightarrow{w} u \quad \text{在 } H^1(\mathbb{R}^n) \text{ 中}, \tag{9.16}$$

$$u_k \xrightarrow{a.e.} u \quad \text{在 } \mathbb{R}^n \text{ 中}. \tag{9.17}$$

由于在每个有界区域 Ω 上，嵌入 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ $(r = 2, q)$ 是紧的，通过进一步用对角线法抽子列(仍记为 u_k)，可使

$$u_k \longrightarrow u \qquad \text{在 } L^r_{loc}(\mathbb{R}^n) \text{ 中}. \quad (r = 2, q) \tag{9.18}$$

记 $\theta_k = u_k - u$，根据 L^1 有界列在 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 中的淡列紧性(命题 9.4)，存在 u_k 的子列，仍记为 u_k，及正则有限测度 $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 使得

$$|\nabla\theta_k|^2 \xrightarrow{v} \mu \qquad \text{在 } \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \text{ 中}. \tag{9.19}$$

这样，由 (9.16) 及 (9.19)，应用引理 9.4 得

$$\|\nabla u_k\|_2^2 = \|\nabla u\|_2^2 + \|\mu\|_{var} + \mu_\infty + o(1), \tag{9.20}$$

此处 μ_∞ 由 (9.9) 式定义，但其中 $f_k = |\nabla\theta_k|^2$. 对于 $|u_k|^2$ 及 $|u_k|^q$，注意到条件 (9.18)，依据引理 9.5 及注记 9.6，通过再次抽子列，我们有

$$\|u_k\|_r^r = \|u\|_r^r + \nu_\infty^{(r)} + o(1), \quad (r = 2, q) \tag{9.21}$$

其中

$$\nu_\infty^{(r)} = \lim_{R\to\infty}\lim_{k\to\infty}\int_{|x|\ge R}|u_k|^r\,\mathrm{d}x. \quad (r = 2, q)$$

记 $\nu_\infty^{(q)} = \alpha$ (从而 $I(u) = 1 - \alpha$, $\mathcal{E}(u) \ge I_{1-\alpha}$)，将证明 $\alpha = 0$ 或 $\alpha = 1$. 用反证法，假定 $0 < \alpha < 1$，则必将成立如下不等式

$$\mu_\infty + \nu_\infty^{(2)} \ge \mathcal{I}_\alpha. \tag{9.22}$$

确实，对于 $\rho > 0$ 充分大，取 $\xi_\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; [0,1])$ 使得

$$\xi_\rho = 0 \text{ 在 } B_\rho \text{ 内}, \quad \xi_\rho = 1 \text{ 在 } B_{\rho+1} \text{ 外}, \quad \text{且 } |\nabla \xi_b| \le 2 \tag{9.23}$$

对于固定的 ρ，$\xi_\rho \theta_k \xrightarrow{w} 0$ 于 H^1，遂有

$$\int |\nabla \xi_\rho u_k|^2 = \int |\nabla \xi_\rho \theta_k|^2 + \int |\nabla \xi_\rho u|^2 + o(1).$$

因 $\theta_k \nabla \xi_\rho$ 具紧支集，由 (9.18) 知

$$\int |\nabla \xi_\rho \theta_k|^2 = \int \xi_\rho^2 |\nabla \theta_k|^2 + o(1),$$

由以上两式推知，随着 $k \to \infty$，我们有

$$\int |\nabla \xi_\rho u_k|^2 \le \int_{|x| \ge \rho} |\nabla u_k|^2 + \int_{\rho \le |x| \le \rho+1} 4\left\{u|\nabla u| + u^2\right\} + o(1).$$

先令 $k \to \infty$，然后令 $\rho \to \infty$，这时上式括号内的积分趋于零，我们有

$$\mu_\infty \ge \lim_\rho \overline{\lim_k} \int |\nabla \xi_\rho u_k|^2 \tag{9.24}$$

又，显然 (见引理 9.5 之 (9.11) 式)

$$\nu_\infty^{(r)} = \lim_\rho \overline{\lim_k} \int |\xi_\rho u_k|^r, \qquad (r = 2,\, q) \tag{9.25}$$

从而由 (9.24) 及 (9.25) 得

$$\begin{aligned}
\mu_\infty + \nu_\infty^{(2)} &\ge \lim_\rho \overline{\lim_k} E(\xi_\rho u_k) \\
&= \lim_\rho \overline{\lim_k} I^{2/q}(\xi_\rho u_k)\left[I^{-2/q}(\xi_\rho u_k) E(\xi_\rho u_k)\right] \\
&\ge \lim_\rho \overline{\lim_k} I^{2/q}(\xi_\rho u_k) I_1 = \alpha^{2/q} \mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_\alpha.
\end{aligned}$$

最后，我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= E(u_k) + o(1) \\
&= \|\nabla u_k\|_2^2 + \|u_k\|_2^2 + o(1) \\
&\ge \|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2 + (\mu_\infty + \nu_\infty^{(2)}) \\
&\ge \mathcal{I}_{1-\alpha} + \mathcal{I}_\alpha.
\end{aligned}$$

这与 $\mathcal{I}_\lambda$ 的严格次可加性矛盾，故 $\alpha = 0$ 或 $\alpha = 1$. $|u_k|^q$ 不会两分.

2° 由胎紧到紧性 在第 3° 步的论证中，如果 $\alpha = 0$，则 $\|u\|_q = 1$，由 Brezis-Lieb 引理推出，$u_k \xrightarrow{s} u$ 在 L^q 中.

如果 $\alpha = 1$，由于 u_k 不会消逝，故存在一列平移，使得

$$\tilde{u}_k = u_k(\cdot + y_k),$$

成为 L^q 胎紧列，由于平移不变性，$\tilde{u}_k$ 依然是极值问题 (9.14) 的极小化序列，但却有 (或许要经过抽取子列)，$\tilde{\alpha} = \tilde{\nu}_\infty^{(q)} = 0$，而 $\tilde{u}_k \xrightarrow{s} \tilde{u}$ 在 L^q 中.

根据泛函 $E(u)$ 的下半弱连续性 (通过抽子列，设 $\tilde{u}_k \xrightarrow{w} \tilde{u}$ 于 H^1 中)，

$$\mathcal{I}_1 = \lim E(\tilde{u}_k) \geq E(\tilde{u})$$

即 $E(u)$ 在条件 $I(u) = 1$ 下达到极小，从而获得问题 (9.14) 的解. □

注记 9.7 极值问题 (9.14) 的解必然是球面 (径向) 对称的.

确实，设 u 是极值问题 (9.14) 的解，u^* 是 u 的单减球面对称重排，那么

$$\|u^*\|_r^r = \|u\|_r^r, \quad (r = 2, q) \qquad \text{(31 页, } Lp \text{ 恒等式)}$$

$$\|\nabla u^*\|_2^2 \leq \|\nabla u\|_2^2. \qquad \text{(34 页, Pólya-Szegö 不等式)}$$

于是

$$I(u^*) = I(u) = \lambda, \quad E(u^*) \leq E(u) = \mathcal{I}_\lambda.$$

这无异于说 $E(u^*) = E(u) = \mathcal{I}_\lambda$，因而 $\|\nabla u^*\|_2^2 = \|\nabla u\|_2^2$. 根据函数对称重排的理论，$u^* = u$ (或许要经过一个平移).

四、涉空间变量的情形

我们假设 $K \in C(\mathbb{R}^n)$，$K(x) \neq \text{Const.}$，且满足条件

$$\lim_{|x|\to\infty} K(x) = 1, \quad K(x) \geq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{K}$$

在条件 (K) 下 (K 必然有界)，讨论极值问题

$$\mathcal{J}_\lambda = \inf\{E(u) :\ u \in H^1,\ J(u) = \lambda\}, \tag{9.26}$$

其中 $E(u)$ 仍如上一目，而

$$J(u)=\int_{\mathbb{R}^n}K|u|^q,\quad u\in H^1(\mathbb{R}^n).$$

解决极值问题 (9.26) 的思路是将原来的问题与其极限情形 ($|x|\to\infty$) 联系起来，同时考察辅助极值问题

$$\mathcal{I}_\lambda=\inf\{E(u):u\in H^1,\ I(u)=\lambda\}.$$

简单推导知 $\mathcal{J}_\lambda$ 及 $\mathcal{I}_\lambda$ 满足如下齐次性条件

$$\mathcal{J}_\lambda=(\lambda)^{2/q}\mathcal{J}_1,\qquad \mathcal{I}_\lambda=(\lambda)^{2/q}\mathcal{I}_1, \tag{9.27}$$

因而 $\mathcal{J}_\lambda$ 及 $\mathcal{I}_\lambda$ 仍满足严格次可加性条件 (S). 而由于条件 (K)，我们有

$$\mathcal{J}_\lambda<\mathcal{I}_\lambda\quad(\lambda>0). \tag{S'}$$

确实，设 $u\in H^1$ 是 $\mathcal{I}_\lambda$ 的解，则由极大值原理 $u>0$. 因 $1\le K(x)\not\equiv 1$，故 $J(u)>I(u)$，从而得 $\mathcal{J}_\lambda<\mathcal{I}_\lambda$.

设 $u_k\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathcal{J}_1$ 的一个极小化序列，即

$$\begin{cases}J(u_k)=\displaystyle\int K|u_k|^q=1,\\ E(u_k)=\mathcal{J}_1+o(1).\end{cases} \tag{9.28}$$

当然可以要求 $u_k\ge 0$，否则用 $|u_k|$ 代替. 我们有

命题 9.8 设 $q\in(2,2^*)$，$K\in C(\mathbb{R}^n)$ 满足 (K) 且不恒等于常数，则由 (9.28) 给出的极值问题 (9.26) 的每一个极小化序列在 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 中相对列紧，因而 $\mathcal{J}_1$ 可达，而问题 (9.12) 有解.

证明 1° 排除消逝 $|u_k|^q$ 的任何子列不会消逝，证明过程与 $K(x)\equiv 1$ 的情形完全相同.

2° 排除两分 我们依然用 $\mathcal{J}_\lambda$ 的严格次可加性条件 (S) 来排除两分. 由于 u_k 在 H^1 中有界，$q\in(2,2^*)$，如同上一目，通过抽子列，存在 $u\in H^1(\mathbb{R}^n)$，使得 u_k 在 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 中弱收敛于 u，且满足从 (9.16) 到 (9.25) 的关系式.

此外，注意到 $K(\infty)=1$，应用引理 9.5，由条件 (9.18) 得

$$1=\int_{\mathbb{R}^n}K|u_k|^q=\int_{\mathbb{R}^n}K|u|^q+\nu_\infty^{(q)}+o(1). \tag{9.29}$$

从而

$$\nu_\infty^{(q)} = \lim_b \overline{\lim_k} \int K|\xi_b u_k|^q = \lim_b \overline{\lim_k} J(\xi_b u_k). \tag{9.30}$$

其中 μ_∞ 及 $\nu_\infty^{(r)}$ 在表达式上均与上一目相同.

记 $\nu_\infty^{(q)} = \alpha$，则 $J(u) = 1 - \alpha$，故 $E(u) \geq \mathcal{I}_{1-\alpha}$. 将证明 $\alpha = 0$ 或 $\alpha = 1$. 用反证法，假定 $0 < \alpha < 1$ (从而 $\|u\|_q > 0$)，我们断言

$$\mu_\infty + \nu_\infty^{(2)} \geq \mathcal{J}_\alpha.$$

这一不等式的建立与上一目不等式 (9.22) 的证明也没有多大差异，只须最后注意 (9.30). 这将导致 $\mathcal{J}_1 \geq \mathcal{J}_\alpha + \mathcal{J}_{1-\alpha}$，与 $\mathcal{J}_\lambda$ 的严格次可加性条件矛盾.

3° 极小化序列的相对列紧性　今往证 $\alpha = 0$，即 $\nu_\infty^{(q)} = 0$. 设若不然，而有 $\alpha = 1$，即 $u \equiv 0$，根据 (9.29)，我们将有

$$\int_{\mathbb{R}^n} K|u_k|^q = \int_{\mathbb{R}^n} |u_k|^q = 1 + o(1),$$

从而 $I(u_k) = 1 + o(1)$，故

$$\mathcal{I}_1 \leq \lim E(u_k) = \mathcal{J}_1,$$

这与条件 (S′) $\mathcal{J}_\lambda < \mathcal{I}_\lambda$ 矛盾.

由 $\nu_\infty^{(q)} = 0$ 及 (9.21) 式知,

$$\|u_k\|_q^q = \|u\|_q^q + o(1),$$

又因 $u_k \xrightarrow{a.e.} u$，故由 Brezis-Lieb 引理知，$u_k \xrightarrow{s} u$ 在 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 中. □

第十章 凝聚紧性原理 II

按照 P.L. Lions [141]，第二类凝聚紧性原理处理那些紧性缺失的变分问题，其中紧性的丧失来自变分问题自身在局部非紧致群作用下的不变性，如伸缩变换，因而凝聚现象可能在有限点出现.

本章将给出若干具体问题下，第二类凝聚紧性原理的简约形式，为后来作者对原文的简化，它们能够同时处理有限点和无穷远点的凝聚.

第一节 核心引理

下列引理是第二类凝聚紧性原理的核心，它产生的背景可在以后各节的具体问题中看出.

引理 10.1 (P.L. Lions [139, 141]) 设 $1 \le p < q \le \infty$，又 μ, ν 是 $\mathbb{R}^n$ 上的两个有限正则测度，满足

$$\left(\int |\xi|^q d\nu\right)^{1/q} \le C\left(\int |\xi|^p d\mu\right)^{1/p}, \quad \forall \xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$

其中 $C > 0$ 是不依赖于 ξ 的常数，则有非负数列 ν_i 及点列 $x_i \in \mathbb{R}^n$，使得

$$\nu = \sum_1^\infty \nu_i \delta_{x_i} \quad 且 \quad \sum_1^\infty |\nu_i|^{p/q} < \infty.$$

证明 测度的正则性保证 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p(\mu)$ 及 $L^q(\nu)$ 中稠密 (见 318 页 Lusin 定理)，引理中的不等式对于所有 $\xi \in L^p(\mu) \cap L^q(\nu)$，特别对具有紧支集

的阶梯函数 ξ 成立. 不失一般性，可设 $q>1, p=1$. 于是对于任意具紧支集的阶梯函数 f，

$$\int |f|^q d\nu \le C\left(\int |f|d\mu\right)^q. \tag{10.1}$$

由上式不难看出 ν 关于 μ 绝对连续，即 $\nu \ll \mu$. 根据 Radon-Nikodym 定理 (见 316 页定理 B.1)，存在非负 μ 可积函数 h，使得 $d\nu = hd\mu$. 故 (10.1) 变为

$$\int |f|^q hd\mu \le C\left(\int |f|d\mu\right)^q. \tag{10.1'}$$

我们须证明 ν 的支集为至多可数无穷点集.

1° 若 $h=\chi_E$ 是有界 Borel 集 E 的特征函数，我们断言，ν 在 E 上的支集是孤立点. 不然的话，存在 E 的聚点 x_0 及正数列 $\{a_m\}$，$a_m \downarrow 0$，集合列

$$E_m = \{x \in E:\ a_{m+1} \le |x-x_0| < a_m\},$$

使得 $E=\sum E_m$，且测度 $\nu(E_m)=\mu(E_m)=\mu_m>0$. 由测度 μ 的有限性，$\sum \mu_m < \infty$. 记 $r_m = \sum_{k=m}^{\infty}\mu_k$，根据正项收敛级数的 Dini 定理 (见《微积分学教程》第二卷第 11 章)，我们有

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu_m}{r_m}=\infty,\quad \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu_m}{r_m^{1/q}}<\infty.$$

记 χ_m 为 E_m 的特征函数，令

$$f_m(x)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{r_k^{1/q}}\chi_k(x),\quad \forall\, x\in E.$$

则 f_m 具紧支集. 将 f_m 代入不等式 (10.1) 左边，得

$$\begin{aligned}\int |f_m(x)|^q d\nu &= \int |f_m(x)|^q h(x)d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{m}\int_{E_k} |f_m(x)|^q h(x)d\mu \\ &\ge \sum_{k=1}^{m}\frac{\mu_k}{r_k} \to \infty \quad (\,m\to\infty\,).\end{aligned} \tag{10.2}$$

将 f_m 代入不等式 (10.1) 右边的积分，得

$$\begin{aligned}\int |f_m(x)|d\mu &= \sum_{k=1}^{m}\int_{E_k}|f_k(x)|d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{m}\frac{\mu_k}{r_k^{1/q}} < \infty \quad (m\to\infty).\end{aligned} \tag{10.3}$$

(10.2) 及 (10.3) 与不等式 (10.1) 矛盾，故 ν 在 E 上的支集由孤立点组成，因而 ν 在 E 上的支集为有限集.

2° 若 h 是一般的 μ 可积函数, 则 h 可写为

$$h = \sum_{m=1}^{\infty} a_m\chi_m, \ (a_n > 0) \tag{10.4}$$

其中 χ_m 的支集 F_m 两两互不相交，F_m 是有界 Borel 集.

由于 $(10.1)'$ 对于 $h_m = a_m\chi_m$ ($\leq h$) 均成立，因而 ν 在 F_m 上的支集为有限集. 故

$$\mathrm{sppt}(\nu) = \bigcup_{m=1}^{\infty}\mathrm{sppt}(\nu|_{F_m})$$

为至多可数无穷点集.

记 $\mathrm{sppt}(\nu) \triangleq \{x_1, x_2, \cdots\}$，则

$$\nu = \sum_{m=1}^{\infty}\nu_m\delta_{x_m}, \quad (\nu_m \geq 0).$$

取 $f = \chi_{\{x_m\}}$ 代入 (10.1)，得

$$\nu_m^{1/q} \leq C'\mu(\{x_m\}), \quad m = 1, 2, \cdots$$

将上式累加便得

$$\sum_{m\geq 1}\nu_m^{1/q} \leq C'\mu(\mathbb{R}^n) < \infty.$$

这样便完成了引理的证明. □

第二节　最佳 HLS 常数的极值函数

本节讨论 n 维空间中 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式 (HLS 不等式) 最佳常数的极值函数的存在性问题.

我们知道，在 $\mathbb{R}^n$ 上成立如下 HLS 不等式 (见第 334 页附录 C).

$$H\|u*|x|^{-\lambda}\|_q^q \le \|u\|_p^q, \quad \forall\, u \in L^p(\mathbb{R}^n), \tag{10.5}$$

其中 p, q, λ 满足关系

$$0<\lambda<n, \quad 1<p<\frac{n}{n-\lambda}, \quad \frac{1}{p}+\frac{\lambda}{n}=1+\frac{1}{q}, \tag{10.6}$$

H 为最佳 HLS 常数，也就是使 (10.5) 式成立的最小正的常数.

不等式 (10.5) 的一维情形由 Hardy-Littlewood [112] 证明，一般情形由 Sobolev [186] 证明 (也见 Sobolev [187])，现统称 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式，参见附录 C 定理 C.7 及其证明.

我们关心的问题是 (10.5) 中的最佳常数 H 是否可为某个函数 $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 取到. 这就导致研究极值问题

$$H \triangleq \inf\left\{1/J(u) : \mathcal{E}(u)=1,\ u \in L^p(\mathbb{R}^n)\right\}, \tag{10.7}$$

其中

$$J(u)=\|K*u\|_q^q, \quad \mathcal{E}(u)=\|u\|_p^p. \quad (K(x)=|x|^{-\lambda})$$

由于泛函 $J(u)$ 及 $\mathcal{E}(u)$ 既是平移不变的，又是伸缩不变的 (由关系 (10.6) 推出)，变分问题 (10.7) 不具有紧性条件，甚至在局部也不具备，普通变分法便不能用于解决极值函数的存在性问题. 本节将用凝聚紧性原理证明，H 可被某个函数 $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 取得.

一、关于 HLS 不等式的几点注记

1. HLS 不等式成立的必要条件.

先分析指数 p, λ, q 间的关系. 用 p' 及 q' 分别表示 p, q 的 Hölder 对偶数，则关系式 (10.6) 隐含

$$1<p<q, \quad q\lambda>n, \quad p'\lambda>n.$$

我们指出，条件 (10.6) 是 HLS 不等式 (10.5) 成立的必要条件. 事实上，在伸缩变换

$$\delta_\sigma f \triangleq f(\,\cdot\,/\sigma)\sigma^{-n/p}, \tag{10.8}$$

下，简单换元积分表明

$$\|\delta_\sigma f\|_p = \|f\|_p, \quad \|K*(\delta_\sigma f)\|_q = \sigma^\mu \|K*f\|_q,$$

其中 $\mu = \frac{n}{q} - \frac{n}{p} + n - \lambda$. 所以若不等式 (10.5) 成立，则对所有 $\sigma > 0$ 有

$$\sigma^\mu \|K*f\|_q \le C\|f\|_p,$$

这只有在 $\mu = 0$ 时才成立，即 (10.6) 成立. 这也顺带证明了泛函 $J(u)$ 及 $\mathcal{E}(u)$ 的伸缩不变性.

此外，$p=1$ 时，(10.5) 一定不成立. 事实上，取 J_ε 为 Friedrichs 正则化算子，若 (10.5) 对于 $p=1$ 成立，则

$$\|K*J_\varepsilon(x)\|_{n/\lambda} \le C\|J_\varepsilon\|_1 = C,$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$，则 $K*J_\varepsilon \xrightarrow{\text{a.e.}} |x|^{-\lambda}$ (见第 326 页)，根据 Fatou 引理，我们将有 $|x|^{-\lambda}$ 属于 $L^{n/\lambda}$，但这不是事实.

2. 从 HLS 不等式到 Sobolev 不等式.

HLS 不等式的重要性在于它可导出 Sobolev 不等式. 确实，设 $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$，对于任意一个 n 维单位向量 ω，根据微积分学基本定理有

$$f(x) = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} f(x+\omega r)\mathrm{d}r,$$

对所有方向积分，即在单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上积分，我们有

$$f(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int \frac{(x-y)\cdot\nabla f(y)}{|x-y|^n}\mathrm{d}y,$$

于是,

$$|f(x)| \le \frac{1}{\omega_{n-1}} \int \frac{|\nabla f(y)|}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y, \tag{10.9}$$

即 $|f(x)| \le C_n \big| |x|^{1-n} * |\nabla f| \big|$. 如果 $1 < p < n$，应用 HLS 不等式 (10.5) 便得

$$\|f\|_{np/(n-p)} \le C\|\nabla f\|_p.$$

这正是 $1 < p < n$，$m = 1$ 情形的 Sobolev 不等式，由此迭代，便得一般情形 $m \geq 1$ 的 Sobolev 不等式.

$p = 1$ 时，Sobolev 不等式不能由 HLS 不等式直接导出. 用初等方法，Gagliardo [102] 与 Nirenberg [156] 给出包含 $p = 1$ 情形的 Sobolev 不等式的证明，参见 Gilbarg-Trudinger [106] 及 Aubin [5].

二、极值函数的存在性

1. 变分方法. 考虑带参数 β 的条件极值问题

$$H_\beta = \inf\{1/J(u) : u \in L^p(\mathbb{R}^n),\ \mathcal{E}(u) = \beta\}. \tag{10.10}$$

显然，$H = H_1$，而 $H_\beta = \beta^{-q/p}H$. 因 $q > p$，H_β 满足严格次可加性条件

$$H_{\alpha+\beta} < H_\alpha + H_\beta, \quad \alpha, \beta > 0. \tag{S}$$

设 $u_k \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 是极值问题 (10.10) 相应于 H_1 的一极小化序列，即

$$H = \frac{1}{J(u_k)} + o(1), \quad \mathcal{E}(u_k) = 1.$$

按照第一类凝聚紧性原理，$\{|u_k|^p\}$ 可能发生消逝，也可能两分，或者 $\{u_k\}$ 或其子列经一列平移后 L^p 胎紧 (由于平移不变性，仍是极小化序列). 由于泛函 $J(u)$ 及 $\mathcal{E}(u)$ 在伸缩变换

$$u \mapsto \sigma^{-n/p}u(\cdot/\sigma)$$

下保持不变，更增加了一种可能性，u_k 的值向某些有限点凝聚. 例如，设想 u 就是 H_1 的极值函数，由于伸缩不变性，$u_\sigma \triangleq \sigma^{-n/p}u(\cdot/\sigma)$ 仍是极值函数，但其值将随 $\sigma \to 0$ 而向原点附近凝聚.

为了从可能包含凝聚点的 H_1 的极小化序列 u_k 中重构一个在 L^p 中收敛的极小化序列，关键依赖 $|u_k|^p$ 的凝聚函数序列

$$Q_{u_k}(t) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{y+B_t}|u_k|^p\,\mathrm{d}x, \quad t > 0.$$

由于严格次可加性条件，$|u_k|^p$ 不会两分. 而要防范消逝与凝聚，由于伸缩不变性及平移不变性，可以通过一列变换

$$\tilde{u}_k = \tau(y_k, \sigma_k)(u_k) \triangleq \sigma_k^{-n/p}u_k((\cdot + y_k)/\sigma_k) \tag{10.11}$$

重新规范极小化序列的行为，使得 $Q_{\tilde{u}_k}(1)=1/2$，这样新的极小化序列 $\tilde{u}_k$ 既不会消逝也不会向一点 (包括无穷远点) 凝聚，而按 L^p 范数收敛于一个函数 u，它便是 H_1 的极值函数.

定理 10.2 设 u_k 是极值问题 (10.10) ($\beta=1$) 的任意一个极小化序列，则存在点列 $y_k\in\mathbb{R}^n$，数列 $\sigma_k>0$，使得在变换 (10.11) 下，新的极小化序列 $\tilde{u}_k$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中相对列紧，而最佳常数 $H=H_1$ 存在极值函数.

定理的证明主要依赖 HLS 不等式情形的凝聚紧性引理，即引理 10.5. 我们把定理 10.2 的证明放在最后完成.

2. 辅助引理.

我们知道，由于伸缩不变性，从 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 的映射 $u\mapsto K*u$ 不是紧的，甚至在局部也不是紧的. 尽管如此，以下两个引理表明，这个映射仍具有较为良好的特性.

引理 10.3 设 $\{u_k\}\subset L^p(\mathbb{R}^n)$ 满足 $u_k\xrightarrow{w}u$ 于 L^p 中，则 $K*u_k\xrightarrow{\text{a.e.}}K*u$ 于 $\mathbb{R}^n$ 中.

证明 记 χ_{B_d} 为闭球 B_d (球心原点，半径 d) 的特征函数，将 K 分解为

$$K=K_d+K^d,$$

其中
$$K_d=\chi_{B_d}K,\quad K^d=(1-\chi_{B_d})K.$$

因 $K=|x|^{-\lambda}$，$1<\lambda<n$，$p'\lambda>n$，我们有 $K_d\in L^1$ 及 $K^d\in L^{p'}$.

记 $\varphi_k=u_k-u$，则 $\varphi_k\xrightarrow{w}0$ 在 L^p 中. 将 $K*\varphi_k$ 按下式分解为两部分：

$$K*\varphi_k=K_d*\varphi_k+K^d*\varphi_k. \tag{10.12}$$

先分析 (10.12) 式右端第一部分. 因 $\|u\|_p\le\underline{\lim}\|u_k\|_p=1$，我们有 $\|\varphi_k\|_p\le 2$，根据 Young 不等式，

$$\begin{aligned}\|K_d*\varphi_k\|_p&\le\|K_d\|_1\|\varphi_k\|_p\\&\le 2\|K_d\|_1\longrightarrow 0,\quad (d\downarrow 0).\end{aligned}$$

即当 $d\to 0$ 时，$\|K_d*\varphi_k\|_p$ 关于 k 一致趋向于零. 故存在数列 $d_j\downarrow 0$，使当 $j\to\infty$ 时关于 k 一致地有 (见第 15 页命题 1.18)

$$K_{d_j}*\varphi_k\xrightarrow{\text{a.e.}}0\quad (d_j\downarrow 0). \tag{10.13}$$

另一方面，对于固定的 d，$K^d \in L^{p'}$，由于 φ_k 在 L^p 中弱收敛于零，所以

$$K^d * \varphi_k(x) = \int K^d(x-y)\varphi_k(y)\mathrm{d}y \longrightarrow 0 \tag{10.14}$$

对于 $x \in \mathbb{R}^n$ 几乎处处成立. 联合 (10.13) 与 (10.14) 就证明 $K * \varphi_k$ 几乎处处收敛于 0，即 $K * u_k \xrightarrow{\text{a.e.}} K * u$ 于 $\mathbb{R}^n$. □

引理 10.4 假设在 L^p 中，序列 $u_k \xrightarrow{w} u$，如果 $|u_k|^p$ 是胎紧序列，则 $|K * u_k|^q$ 也是胎紧序列.

证明 设 R, M 是两个充分大的正实数，并设 $R < M$. 将函数 $f \in L^p$ 及势函数 K 分别分解为

$$f = f_1 + f_2, \quad \text{其中} \quad f_1 = f\chi_{B_R}, \quad f_2 = f\chi_{C^R}$$
$$K = K_1 + K_2, \quad \text{其中} \quad K_1 = K\chi_{B_M}, \; K_2 = K\chi_{C^M}.$$

这里 χ_{B_R} 表示 B_R 的特征函数，而 B_R 则是中心在原点，半径为 R 的球，C^R 为其补集. 不难发现

$$\|K * f\|_{q,C^M} \le \|K_2 * f_1\|_q + \|K * f_2\|_q.$$

对上式右端第一项用 Young 不等式 (注意 $\lambda q > n$)，第二项用 HLS 不等式，我们有

$$\|K * f\|_{q,C^M} \le \|K_2\|_q \cdot \|f_1\|_1 + C\|f_2\|_p. \tag{10.15}$$

选取 $M \gg R$ 使得 $\|K_2\|_q(\mathrm{Vol}(B_R))^{\tilde{p}} \le R^{-1}$. 对 $\|f_1\|_1$ 应用 Hölder 不等式得

$$\|K * f\|_{q,C^M} \le R^{-1}\|f\|_p + C\|f_2\|_p, \tag{10.16}$$

将 (10.16) 式中的 f 用 u_k 替代，注意 $\|u_k\|_p$ 一致有界，则当 $R \to \infty$ 时

$$\left(\|u_k\|_{p,C^R} \xrightarrow{1\,(k)} 0 \right) \Longrightarrow \left(\|K * u_k\|_{q,C^M} \xrightarrow{1\,(k)} 0 \right),$$

即 $|u_k|^p$ 的胎紧隐含 $|K * u_k|^q$ 的胎紧 (这里 $1\,(k)$ 表示关于 k 一致收敛). □

3. HLS不等式控制下的凝聚紧性引理.

设 p, q, λ 满足 (10.6)，$K=|x|^{-\lambda}$. 设 u_k 是 L^p 有界列，那么，通过抽取子列，存在 $u\in L^p$，$\mu\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 使得

$$u_k \xrightarrow{w} u \quad \text{在 } L^p \text{ 中}, \tag{10.17a}$$

$$|u_k|^p \xrightarrow{v} \mu \quad \text{在 } \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \text{ 中}, \tag{10.17b}$$

$$\|u_k\|_p^p \to \|\mu\|_{var}+\mu_\infty, \tag{10.17c}$$

其中 $\mu_\infty\geq 0$ 由 (9.9) 式定义，但其中 $f_k=|u_k|^p$. (10.17a) 来自 L^p 空间的自反性，(10.17b) 及 (10.17c) 由引理 9.4 推出.

根据 HLS 不等式，$\{K*u_k\}\subset L^q$，且依引理 10.3，$K*u_k \xrightarrow{\text{a.e.}} K*u$. 记 $\theta_k=u_k-u$，应用引理 9.5，继续抽取子列，存在有限正则测度 ν 使得

$$|K*\theta_k|_q^q \xrightarrow{v} \nu \quad \text{在 } \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \text{ 中}, \tag{10.18a}$$

$$\|K*u_k\|_q^q \to \|K*u\|_q^q+\|\nu\|_{var}+\nu_\infty, \tag{10.18b}$$

其中 $\nu_\infty\geq 0$ 定义为 (9.9) 式右边，但其中 $f_k=|K*u_k|^q$.

因此，对于 L^p 中的有界序列而言，作以上假设是自然而然的. 现在叙述并证明本节的核心引理

引理 10.5 设 p, q, λ 满足 (10.6). 设序列 $\{u_k\}\subset L^p(\mathbb{R}^n)$ 满足 (10.17) 及 (10.18) 所列诸条件，记 $\theta=\frac{p}{q}$，则通过抽取子列，存在 $\nu_j>0$，$x_j\in\mathbb{R}^n$，其中 $j\in J\subset\mathbb{N}$，使得

(α) $$\nu=\textstyle\sum_J \nu_j\delta_{x_j}, \quad \sum_J \nu_j^\theta<\infty,$$

(β) $$|u|^p+\textstyle\sum_J (H\nu_j)^\theta\delta_{x_j}\leq\mu, \quad (H\nu_\infty)^\theta\leq\mu_\infty.$$

证明 1° 给定 ξ，有界可测且具紧支集. 根据引理 10.3 知，条件 (10.17a) 隐含 $K*(\xi u_k)\xrightarrow{\text{a.e.}} K*(\xi u)$. 依 Brezis-Lieb 引理，我们有

$$\|K*(\xi\theta_k)\|_q^q\leq\|K*(\xi\theta_k)\|_q^q+\|K*(\xi u)\|_q^q=\|K*(\xi u_k)\|_q^q+o(1).$$

于是根据 HLS 不等式得，

$$H^{1/q}\left(\int|K*(\xi\theta_k)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}\leq\left(\int|(\xi u_k)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}+o(1). \tag{10.19}$$

我们断言，当 $k \to \infty$ 时，

$$\int |K*(\xi\theta_k)|^q \mathrm{d}x - \int |\xi|^q |K*\theta_k|^q \mathrm{d}x = o(1), \tag{10.20}$$

并且，若将 ξ 换作 $1-\xi$，(10.20) 依然成立. (10.20) 的证明将在最后第 3° 段给出. 联合 (10.19) 及 (10.20) 两式得

$$H^{1/q}\left(\int |\xi|^q |K*\theta_k|^q\right)^{1/q} \leq \left(\int |\xi|^p |u_k|^p\right)^{1/p} + o(1). \tag{10.21}$$

令 $k \to \infty$，上式过渡到极限便是

$$H^{1/q}\left(\int |\xi|^q \mathrm{d}\nu\right)^{1/q} \leq \left(\int |\xi|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}. \tag{10.22}$$

由于 ξ 的任意性，及测度 μ, ν 的正则性，有限性，上式对所有具紧支集的有界 Borel 可测函数 ξ 成立. 应用引理 (10.1) 便获证引理的论断 (α).

2° 在 (10.22) 中，取 $\xi = \chi_{\{x_j\}}$，$j \in J$，便得

$$(H\nu_j)^\theta = (H\nu(\{x_j\}))^\theta \leq \mu(\{x_j\}), \quad \forall\, j \in J.$$

由此，对于任意 Borel 可测集 E，我们有

$$\left(\textstyle\sum_J (H\nu_j)^\theta \delta_{x_j}\right)(E) \leq \mu(E). \tag{10.23}$$

其次，对于每个有界 Borel 可测函数 ξ，由引理条件知，$\xi u_k \xrightarrow{w} \xi u$ 于 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中，由定理 1.3，

$$\|\xi u\|_p^p \leq \lim_k \|\xi u_k\|_p^p = \int |\xi|^p \mathrm{d}\mu$$

取 $\xi = \chi_E$，便有

$$|u|^p(E) \leq \mu(E). \tag{10.24}$$

由于测度 $|u|^p$ 与每个 Dirac 测度互为奇异，故由 (10.23) 与 (10.24) 导出

$$|u|^p + \textstyle\sum_J (H\nu_j)^\theta \delta_{x_j} \leq \mu \quad \text{在 Borel 集上.}$$

往证 $(H\nu_\infty)^\theta \leq \mu_\infty$. 设 $\varphi_R = 1 - \chi_{B_R}$，依 (10.20) 及其后说明，

$$\int |K*(\varphi_R\theta_k)|^q \mathrm{d}x - \int |\varphi_R||K*\theta_k|^q \mathrm{d}x = o(1).$$

由 Brezis Lieb 引理，上式变为

$$\int |K*(\varphi_R u_k)|^q - \int \varphi_R |K*u_k|^q = \int |K*(\varphi_R u)|^q - \int \varphi_R |K*u|^q + o(1).$$

注意，$\|K*(\varphi_R u)\|_q \le C\|\varphi_R u\|_p$，故随着 $R \to \infty$，上式右端两积分将趋于 0. 于是由 ν_∞ 的定义，应用 HLS 不等式得

$$\begin{aligned}(H\nu_\infty)^\theta &= H^\theta \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_k} \|\varphi_R K*u_k\|_q^p \\ &= H^\theta \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_k} \|K*(\varphi_R u_k)\|_q^p \\ &\le \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_k} \|\varphi_R u_k\|_p^p = \mu_\infty.\end{aligned}$$

这样就完成了引理 10.5 的证明.

3° (10.20) 式的证明　若记

$$\phi_k(x) = K*(\xi\theta_k) - \xi(K*\theta_k),$$

只须证 $\|\phi_k\|_q \to 0$. 一方面，因 ξ 具紧支集，故序列 $|\xi\theta_k|^p$ 胎紧，依引理 10.4，$|K*(\xi\theta_k)|^q$ 胎紧. 这意味着，当 $R\to\infty$ 时，关于 k 一致地有

$$\|\phi_k\|_{q,\{|x|\ge R\}} \xrightarrow{1\,(k)} 0.$$

故只须在球域 B 上证明 $\|\phi_k\|_{q,B} \to 0$.

而在另一方面，因 $\theta_k \xrightarrow{w} 0$ 于 L^p 中，依引理 10.3，$\phi_k(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} 0$. 如果我们能证明 $\|\phi_k\|_s \le C$ 对于某个 $s > q$ 成立，则在任何有界区域 Ω 上 $\|\phi_k\|_{q,\Omega} \to 0$ (参见命题 1.19). 看得出

$$\phi_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\xi(y)-\xi(x))\theta_k(y)}{|x-y|^\lambda}\,\mathrm{d}y \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} R(x,y)\theta_k(y)\,\mathrm{d}y. \tag{10.25}$$

记

$$H(x) = |x|^{1-\lambda} \text{ 若 } x \le 1, \quad H(x) = |x|^{-\lambda} \text{ 若 } x > 1,$$

那么 $H \in L^r(\mathbb{R}^n)$，其中 $r = \frac{\lambda}{n-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$ 充分小). 因为 $|R(x,y)| \le C_\xi H(x-y)$，我们有

$$|\phi_k(x)| \le C_\xi (H*|\theta_k|)(x),$$

应用 Young 不等式，存在 $s>q$ $\left(\frac{1}{s}=\frac{1}{q}-\frac{\varepsilon}{n}\right)$ 使得

$$\|\phi_k\|_s \le C_\xi \|H\|_r \|\theta_k\|_p \le C'_\xi,$$

故 $\|\phi_k\|_q \to 0$. 这一结论照样成立，如果我们将 ξ 换作 $1-\xi$，因为对于两者 $\phi_k(x)$ 均具有相同的表达式 (10.25). 这样便完成了 (10.20) 式的证明. □

4. **定理 10.2 的证明.**

设 u_k 是极值问题 (10.10) $H=H_1$ 的一极小化序列，由于平移不变性及伸缩不变性，存在点列 $y_k \in \mathbb{R}^n$，数列 $\sigma_k>0$，使得函数列

$$\tilde{u}_k(\cdot) \triangleq u_k((\cdot+y_k)/\sigma_k)\sigma_k^{-n/p}$$

仍是 H 的极小化序列，且对应的凝聚函数列满足

$$Q_{\tilde{u}_k}(1)=\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{y+B_1}|\tilde{u}_k|^p\mathrm{d}x=\int_{B_1}|\tilde{u}_k|^p\mathrm{d}x=\frac{1}{2}. \tag{10.26}$$

将这个新的极小化序列 $\tilde{u}_k$ 重新命名为 u_k. 通过抽取子列，u_k 在 L^p 中弱收敛于 u，并且满足引理 10.5 的条件，(10.17) 及 (10.18) 中各式. 特别

$$1=\|u_k\|_p^p=\|\mu\|_{var}+\mu_\infty. \tag{10.27}$$

我们将证明 $\|u\|_p=1$，于是根据 Radon-Riesz 定理，$u_k \xrightarrow{s} u$ 于 L^p 中. 因此 $H=\lim\|K*u_k\|_p^{-q}=\|K*u\|_p^{-q}$，即 $u\in L^p$ 是最佳常数 H 的极值函数.

记 $\|u\|_p^p=\alpha$，根据 (10.27)，应用引理 10.5 的结论 (β) 得

$$\alpha+\sum\nolimits_{J\cup\infty}(H\nu_j)^\theta \le 1. \tag{10.28}$$

因 u_k 是 $H=H_1$ 的极小化序列，由 (10.18b) 及引理 10.5 的结论 (α) 知，

$$H=\frac{1}{\|K*u_k\|_q^q+o(1)}=\frac{1}{\|K*u\|_q^q+\sum_{J\cup\infty}\nu_j} \tag{10.29}$$

由 (10.29) 出发，并注意 $H^\theta\|K*u\|_q^p\le\alpha$ (HLS 不等式)，我们有如下推理过程

$$\begin{aligned}
1&=\left(H\|k*u\|_q^q+\sum\nolimits_{J\cup\infty}H\nu_j\right)^\theta && \text{(由 (10.29) 式)}\\
&\le\left(\alpha^{q/p}+\sum\nolimits_{J\cup\infty}(H\nu_j)\right)^\theta && \text{(HLS 不等式)}\\
&\le\alpha+\sum\nolimits_{J\cup\infty}(H\nu_j)^\theta && (0<\theta<1)\\
&\le\alpha+1-\alpha=1, && \text{(由 (10.28) 式)}
\end{aligned}$$

这说明上述每个不等式均为等式，故 $\alpha^{q/p}$，$H\nu_j$ $(j\in J)$，$H\nu_\infty$ 中有且仅有一个不为 0，并且等于 1. 如果 $H\nu_1=1$，此时由 (10.27) 及引理 10.5 之 (β)，$\mu=\delta_{x_1}$，这与 (10.26) 矛盾；如果 $H\nu_\infty=1$，此时 $\mu\equiv 0$，同样原因，照样与 (10.26) 矛盾；故 $\|u\|_p^p=\alpha=1$. 定理 10.2 证毕. □

第三节　最佳 SOBOLEV 常数

一、最佳 Sobolev 常数

设 $n, m\geq 1$ 是整数，实数 $p\geq 1$ 满足 $mp<n$. 记 $q=\frac{np}{n-mp}$，我们知道，对于齐次 Sobolev 空间 $\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ 上的函数，成立 Sobolev 不等式：

$$S\|u\|_q^p\leq\|D^m u\|_p^p,\quad \forall\, u\in\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n).$$

其中 $S=S_{n,m,p}$ 是仅依赖于 $n, m\,p$ 的常数，我们取 S 为使得上式成立的最小正数——最佳 Sobolev 常数.

关于 Sobolev 不等式的一个初等证明见 Gagliardo [102] 与 Nirenberg [156]，也见 Aubin [5] 或 Gilbarg-Trudinger [106]，基于 Hardy-Littlewood-Sobolev 定理的证明可见本章第二节，基于几何测度论方法的证明见 Maz'ya [144, 145]. 关于 Sobolev 空间到 Lorentz 空间的嵌入及相应的 Sobolev 不等式，见本书第一章 39 页及其间所列参考文献.

本节关心的问题是最佳 Sobolev 常数极值函数的存在性. 也就是说，我们将讨论极值问题

$$S=\inf_{0\neq u\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)}\frac{\int|D^m u|^p}{\left(\int|u|^q\right)^{p/q}}.\tag{10.30}$$

在 $m=1$ 的情形，利用对称性，T. Aubin (见 [2]) 与 G. Talenti (见 [197]) 独立地证明，问题 (10.30) 存在极值函数，并且当 $1<p<n$ 时，

$$K(n,p)=n^{-\frac{1}{p}}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{(p-1)/p}\left(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{n}{p})\Gamma(n+1-\frac{n}{p})\omega_{n-1}}\right)^{1/n},$$

其中 $K(n,p)=S_{n,1,p}^{-1/p}$. 而在 $p=1$ 时，我们得到通常的等周常数：

$$K(n,1)=\frac{1}{n}\left(\frac{n}{\omega_{n-1}}\right)^{1/n}$$

当 $m \neq 1$ 或 $p \neq 2$ 时，问题不具有对称性. P.L. Lions ([139, 141]) 的方法不依赖对称性. 本节将用凝聚紧性原理证明，最佳 Sobolev 常数存在极值函数.

二、变分框架

我们引进 $\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ 上的泛函:

$$J(u) = \|u\|_q^q, \quad 及 \quad \mathcal{E}(u) = \|D^m u\|_p^p,$$

考虑带参数 β 的条件极值问题

$$S_\beta = \inf \{\mathcal{E}(u) : J(u) = \beta, \ u \in \mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n)\}. \tag{10.31}$$

这样，最佳 Sobolev 常数 $S = S_1$，并且 $S_\beta = \beta^\theta S_1$，其中 $\theta = p/q$. 由于 $0 < \theta < 1$，S_β 满足严格次可加性条件

$$S_{\lambda+\mu} < S_\lambda + S_\mu. \quad (\lambda, \ \mu > 0) \tag{S}$$

现在，设 $\{u_k\}$ 是极值问题 (10.31) 相应于 $\beta = 1$ 的极小化序列，即

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u_k) &\equiv \|D^m u_k\|_p^p = S + o(1), \\ J(u_k) &\equiv \|u_k\|_q^q = 1. \end{aligned} \tag{10.32}$$

我们注意，泛函 $J(u)$ 及 $\mathcal{E}(u)$ 具有平移不变性及伸缩不变性，确切地说，$J(u)$ 与 $\mathcal{E}(u)$ 在如下变换下不变:

$$\mathcal{T}_{h,\sigma} u \triangleq \sigma^{-n/q} u(\tfrac{\cdot + h}{\sigma}), \tag{10.33}$$

其中 $h \in \mathbb{R}^n$ 为常向量，$\sigma > 0$ 为常数. 因而极小化序列 (10.32) 一般来说在 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 中不相对列紧，而会发生我们所不期望的凝聚现象.

为防范发生凝聚，P.L. Lions 的方法是考虑 $\rho_k \triangleq |u_k|^q$ 的凝聚函数列

$$Q_k(t) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{y+B_t} |u_k|^q \mathrm{d}x, \quad \forall t > 0.$$

根据问题的平移不变性及伸缩不变性，可选择一列变换 $\mathcal{T}_{y_k,\sigma_k}$，使得新的极小化序列 $\tilde{u}_k = \mathcal{T}_{y_k,\sigma_k}(u_k)$—— 重新命名为 u_k，满足

$$Q_k(1) = \int_{B_1} |u_k|^q \mathrm{d}x = \frac{1}{2}. \tag{10.34}$$

这样，在条件 (10.34) 下，ρ_k 既不会消逝，也不会凝聚在一点 (包括无穷远点)，而由于严格次可加性条件 (S)，也不会发生（广义的）两分. 最终，u_k 将在 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 中强收敛到 S 的极值函数 u.

定理 10.6 设 $\{u_k\}$ 是极值问题 (10.31) 的任一极小化序列，则存在点列 $y_k \in \mathbb{R}^n$，数列 $\sigma_k > 0$，使得经过平移伸缩变换，$\tilde{u}_k \triangleq \mathcal{T}_{y_k,\sigma_k}(u_k)$，新的极小化序列 $\tilde{u}_k$ 在 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 中相对列紧，而问题 (10.31) 有解.

三、$\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ 中的弱收敛

1. **$\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ 中的有界列.** 设 $\{u_k\}$ 是 $\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ 中的有界列，由 Sobolev 嵌入定理，$\{u_k\}$ 在 L^q 中有界. 由 L^q 的自反性，存在 u_k 的子列，仍记为 u_k，使得

$$u_k \xrightarrow{w} u \quad 在\ L^q(\mathbb{R}^n)\ 中. \tag{10.35}$$

1° 当 $p > 1$ 时，由于 $\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ 的自反性，存在子列 u_k，使得

$$D^m u_k \xrightarrow{w} D^m u \quad 在\ L^p(\mathbb{R}^n)\ 中. \tag{10.36}$$

因为对于任意有界区域 Ω，嵌入 $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,p}(\Omega)$ $(0 \le l < m)$ 是紧的，应用 Helley 选择原理可以证明，存在 u_k 的子列，使得

$$\begin{aligned} &D^l u_k \xrightarrow{s} D^l u \qquad 在\ L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)\ 中, \qquad (0 \le l < m) \\ &u_k \xrightarrow{\text{a.e.}} u \qquad\quad\ \ 在\ \mathbb{R}^n\ 中. \end{aligned} \tag{10.37}$$

2° 当 $p = 1$ 时，$\mathcal{D}^{m,p}$ 不再自反，然而根据定理 1.29，存在 $u \in \mathcal{BV}^m(\mathbb{R}^n)$ (此时 $D^m u$ 是多维向量值的有限 Radon 测度)，及 u_k 的子列使得

$$D^m u_k \xrightarrow{v} D^m u \qquad 在\ \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)\ 中. \tag{10.36$'$}$$

因在有界区域上嵌入 $BV^m(\Omega) \hookrightarrow W^{l,1}(\Omega)$ $(0 \le l < m)$ 紧致，通过抽取子列，(10.37) 仍成立.

对于 $\mathcal{D}^{m,p}$ 中有界序列 u_k，我们关心的是具有“良好”特性的一个子列，所以我们在讨论中不妨假设这些抽取工作已经完成.

2. 截断.

本小节提供所必需的截断技术.

第一类截断　取 $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$，我们有

命题 10.7　设 $u, u_k \in \mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ ($p=1$ 时 $u \in \mathcal{BV}^m(\mathbb{R}^n)$) 满足条件 (10.35)，(10.36) ($p=1$ 时 (10.36′)) 及 (10.37). 记 $\theta_k = u_k - u$，则

$$\int |D^m(\xi\theta_k) - \xi D^m\theta_k|^p = o(1)_\xi.$$

证明　对于任意 m 阶 n 重指标 α，由 Leibniz 公式及 Minkowski 不等式得

$$\left(\int |D^\alpha(\xi\theta_k) - \xi D^\alpha\theta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le C\sum_{\beta<\alpha}\left(\int |D^\beta\theta_k D^{\alpha-\beta}\xi|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{10.38}$$

上式右端每一项积分的被积函数都具有紧支集，故由条件 (10.37) 知，各个积分随 $k\to\infty$ 而趋于零. □

第二类截断　取截断函数 $\phi_R = \phi(\cdot/R)$，其中 $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n;[0,1])$ 满足

$$\phi(x) = 0,\ |x| \le 1; \quad \phi(x) = 1,\ |x| \ge 2 \tag{10.39}$$

命题 10.8　在命题 10.7 的条件下，对于任意 $1 \le j \le m$ 成立

$$\lim_{R\to\infty}\lim_k \int |D^j\phi_R D^{m-j}u_k|^p = 0.$$

证明　对于固定的 R 及 $1 \le j \le m$，因为 $\operatorname{sppt} D^j\phi_R \subset \Omega_R$，其中 Ω_R 是球壳区域 $\{R<|x|<2R\}$，故由条件 (10.37) 得

$$\lim_k \int |D^j\phi_R D^{m-j}u_k|^p = \int |D^j\phi_R D^{m-j}u|^p \triangleq I_R.$$

又因 $|D^j\phi_R|^p \le CR^{-pj}$，于是由 Hölder 不等式，

$$I_R \le CR^{-jp}\cdot|B_{2R}|^{\frac{jp}{n}}\|D^{m-j}u\|^p_{p_j,\Omega_R} \le C\|D^{m-j}u\|^p_{p_j,\Omega_R},$$

其中 $p_j = \frac{np}{n-jp}$. 注意，由 Sobolev 不等式 ($p=1$ 时为不等式 (1.27))，我们有 $D^{m-j}u \in L^{p_j}$. 由积分的绝对连续性，当 $R\to\infty$ 时，$\|D^{m-j}u\|^p_{p_j,\Omega_R} \to 0$，从而 $I_R \to 0$. □

第三类截断　取截断函数

$$\xi_\varepsilon(x_0,x)=1-\phi(\frac{x-x_0}{\varepsilon})$$

其中 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 是固定点，ϕ 为 (10.39) 所定义. 这样 $\xi_\varepsilon(x_0,x)$ 在 $B_\varepsilon(x_0)$ 内取 1，在 $B_{2\varepsilon}(x_0)$ 外取 0. 我们有

命题 10.9　设 $u\in\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$，但若 $p=1$ 时则设 $u\in\mathcal{BV}^m(\mathbb{R}^n)$)，则当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时，

$$I_\varepsilon\triangleq\int|D^j\xi_\varepsilon(x_0,\cdot)D^{m-j}u|^p=o(1),\quad 1\le j\le m.$$

证明　记 $\Omega_\varepsilon=\{\varepsilon<|x|<2\varepsilon\}$，类似于命题 10.8 中 I_R 的估计，我们有 $I_\varepsilon\le C\|D^{m-j}u\|^p_{p_j,\Omega_\varepsilon}$. 由积分的绝对连续性，$I_\varepsilon\to 0$. □

四、极值函数的存在性

1. **Sobolev 不等式下的凝聚紧性引理.**　设 u_k 是 $\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ 中的有界列，定义

$$\nu_\infty\triangleq\lim_{R\to\infty}\varlimsup_k\int_{|x|>R}|u_k|^q\,\mathrm{d}x,\quad \mu_\infty\triangleq\lim_{R\to\infty}\varlimsup_k\int_{|x|>R}|D^m u_k|^p\,\mathrm{d}x.$$

引理 10.10　设函数列 u_k 在 $\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ 中有界，且 $u_k\xrightarrow{w}u$ 于 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 中. 记 $\theta_k=u_k-u$. 假定存在正则有限测度 μ 及 ν 满足

$$|\theta_k|^q\xrightarrow{v}\nu\qquad\text{在 }\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)\text{ 中},\tag{10.40}$$

$$|D^m u_k|^p\xrightarrow{v}\mu\qquad\text{在 }\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)\text{ 中}.\tag{10.41}$$

记 $\theta=p/q$，则通过抽取 $\{u_k\}$ 的子列，存在子集 $J\subset\mathbb{N}$ (J 可能是空集)，以及点集 $\{x_j\in\mathbb{R}^n: j\in J\}$，正实数集 $\{\nu_j\}_J$，使得

(α)　$$\nu=\textstyle\sum_J\nu_j\delta_{x_j},\quad \sum_J\nu_j^\theta<\infty,$$

(β)　$$|D^m u|^p+S\textstyle\sum_J(\nu_j)^\theta\delta_{x_j}\le\mu,\quad S(\nu_\infty)^\theta\le\mu_\infty.$$

证明 首先指出，在定理的条件下，(10.40) 隐含

$$|u_k|^q \xrightarrow{v} |u|^p + \nu \triangleq \lambda \quad 在\ \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)\ 中. \tag{10.42}$$

1° 经过抽取子列，我们不妨假设 (10.35) 式，(10.36) ($p=1$ 时 (10.36′)) 式及 (10.37) 式成立，并且存在 $\mu_1 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 使得

$$|D^m\theta_k|^p \xrightarrow{v} \mu_1 \qquad 在\ \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)\ 中. \tag{10.43}$$

给定 $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$，易见 $\xi\theta_k \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$，由 Sobolev 不等式得

$$S^{1/p}\left(\int |\xi\theta_k|^q\right)^{1/q} \le \left(\int |D^m(\xi\theta_k)|^p\right)^{1/p}.$$

应用命题 10.7 对上式右端估计，我们有

$$S^{1/p}\left(\int |\xi|^q|\theta_k|^q dx\right)^{1/q} \le \left(\int |\xi|^p|D^m\theta_k|^p dx\right)^{1/p} + o(1). \tag{10.44}$$

在上式中令 $k\to\infty$，由 (10.40) 及 (10.43) 得

$$S^{1/p}\left(\int |\xi|^q \mathrm{d}\nu\right)^{1/q} \le \left(\int |\xi|^p \mathrm{d}\mu_1\right)^{1/p}. \tag{10.45}$$

由于 $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 的任意性，上式对所有 $\xi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 成立. 应用引理 10.1 知，存在子集 $J \subset \mathbb{N}$ 及 $\{x_j\}_J \subset \mathbb{R}^n$ 使得

$$\nu = \textstyle\sum_{j\in J}\nu_j\delta_{x_j} \quad 且 \quad \textstyle\sum_{j\in J}|\nu_j|^\theta < \infty, \tag{10.46}$$

这样便证明了引理的结论 (α).

2° 在这一步，将证明结论 (β) 的后半部分，即证 $S\nu_\infty^\theta \le \mu_\infty$. 取命题 10.8 中的光滑截断函数 ϕ_R，这样 ϕ_R 在 B_R 内取 0，在 B_{2R} 外取 1. 由 Leibniz 公式知

$$|D^m(\phi_R u)| \le |\phi_R D^m u| + C\textstyle\sum_{1\le j\le m}|D^j\phi_R D^{m-j}u|.$$

根据 Sobolev 不等式及 Minkowski 不等式，我们有

$$S^{\frac{1}{p}}\left(\int \phi_R^q|u_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\int \phi_R^p|D^m u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + C\sum_{j=1}^m\left(\int |D^j\phi_R D^{m-j}u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

在上式中，先令 $k\to\infty$ 取上极限，再令 $R\to\infty$，根据命题 10.8，上式右端和号后各个积分趋于 0，而由于 ϕ_R 介于 $\chi_{\{|x|\geq R\}}$ 与 $\chi_{\{|x|\geq 2R\}}$ 之间，故

$$\lim_{R\to\infty}\overline{\lim_{k\to\infty}}\int\phi_R^q|u_k|^q\,\mathrm{d}x=\nu_\infty,\quad \lim_{R\to\infty}\overline{\lim_{k\to\infty}}\int\phi_R^p|D^m u_k|^p\,\mathrm{d}x=\mu_\infty,$$

从而 $S^{1/p}(\nu_\infty)^{1/q}\leq(\mu_\infty)^{1/p}$，即 $S(\nu_\infty)^\theta\leq\mu_\infty$.

3° 在这一步，将证明结论 (β) 的前半部分，即证明

$$|D^m u|^p+S\sum\nolimits_J(\nu_j)^\theta\delta_{x_j}\leq\mu. \tag{10.47}$$

由于在单点集 $\{x_j\}$ 上，$|D^m u|^p(\{x_j\})=0$ ($p=1$ 时见 第 24 页 (1.20) 式)，故只须分别建立

$$|D^m u|^p\leq\mu\qquad\text{在 Borel 集上,} \tag{10.48}$$

$$S(\nu_j)^\theta\leq\mu(\{x_j\})\quad\forall\, j\in J. \tag{10.49}$$

先证 (10.48). 当 $p>1$ 时，由于 $D^m u_k$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中 (从而也在 $L^p(\mathbb{R}^n,|\xi|\,\mathrm{d}x)$ 中) 弱收敛于 $D^m u$，故由定理 1.3 及 $|D^m u_k|^p$ 淡收敛于 μ 这一事实知

$$\int|\xi||D^m u|^p\,\mathrm{d}x\leq\varliminf_{k\to\infty}\int|\xi||D^m u_k|^p\,\mathrm{d}x=\int|\xi|\,\mathrm{d}\mu,\quad\forall\,\xi\in C_c(\mathbb{R}^n).$$

由于稠密性及测度 μ 的正则性，上式对所有 Borel 可测函数 ξ 成立，尤其可取 $\xi=\chi_E$ 为 Borel 集 E 的特征函数. 从而 $|D^m u|^p\leq\mu$.

当 $p=1$ 时，根据定理 1.24，$|D^m u|\leq\mu$ 在所有开集上成立. 由测度 $|D^m u|$ 及 μ 的强内正则性，$|D^m u|\leq\mu$ 在所有 Borel 可测集上成立.

现证 (10.49). 对于 $\xi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，如同我们在第 2° 步一样，应用 Sobolev 不等式，$D^m(\xi u_k)$ 的 Leibniz 展式及 Minkowski 不等式，得

$$S^{\frac{1}{p}}\left(\int|\xi|^q|u_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq\left(\int|\xi|^p|D^m u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+C\sum_{j=1}^m\left(\int|D^j\xi|^p|D^{m-j}u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

设 Ω 是包含 ξ 支集的一有界区域，根据条件 (10.37)，对于 $j\geq1$，$D^{m-j}u_k$ 在 $L^p(\Omega)$ 中强收敛于 $D^{m-j}u$. 令 $k\to\infty$，注意到 (10.42)，我们有

$$S^{\frac{1}{p}}\left(\int|\xi|^q\,\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{q}}\leq\left(\int|\xi|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}+C\sum_{j=1}^m\left(\int|D^j\xi|^p|D^{m-j}u|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

在上式中取 $\xi = \xi_\varepsilon(x_j, \cdot)$ 为命题 10.9 中的截断函数，这样 ξ 在 $B_\varepsilon(x_j)$ 内取 1，在 $B_{2\varepsilon}(x_j)$ 外取 0. 令 $\varepsilon \downarrow 0$，根据命题 10.9，上式右端和号后各项积分趋于 0，而由于 $\xi_\varepsilon(x_j, \cdot) \to \chi_{\{x_j\}}$，$|\xi_\varepsilon(x_j, \cdot)|^q \le 1$，$|\xi_\varepsilon(x_j, \cdot)|^p \le 1$，应用控制收敛定理得

$$S^{1/p}\big[\lambda(\{x_j\})\big]^{1/q} \le \big[\mu(\{x_j\})\big]^{1/p}.$$

因 $\lambda = |u|^q + \nu$，$|u|^q(\{x_j\}) = 0$，我们有 $\lambda(\{x_j\}) = \nu(\{x_j\})$，从而上式便意味着 (10.49). 引理证毕. □

2. **极值函数的存在性.**

定理 10.6 的证明 设 $\{u_k\}$ 是极值问题 (10.31) 相应于 $\beta = 1$ 的一极小化序列，即 $\{u_k\}$ 满足 (10.32). 通过抽取子列，我们不妨假设序列 u_k 满足引理 10.10 的条件. 由于极值问题的平移不变性及伸缩不变性，选择一列变换 $\mathcal{T}_{y_k,\sigma_k}$ ($\mathcal{T}$ 的定义见 (10.33))，使得新的极小化序列 $\tilde{u}_k = \mathcal{T}_{y_k,\sigma_k}(u_k)$——重新命名为 u_k，满足

$$Q_k(1) = \int_{B_1} |u_k|^q \mathrm{d}x = \frac{1}{2}. \tag{10.50}$$

此外，(10.32) 及引理 9.4 $\Longrightarrow$ 下列 (10.51)，(10.32) 及引理 9.5 $\Longrightarrow$ 下列 (10.52)，

$$S = \|D^m u_k\|_p^p + o(1) = \|\mu\|_{var} + \mu_\infty, \tag{10.51}$$

$$1 = \|u_k\|_q^q = \|u\|_q^q + \|\nu\|_{var} + \nu_\infty \tag{10.52}$$

我们需证明 $\|u\|_q^q = 1$. 设 $\|u\|_q^q = \alpha$，则 $\|D^m u\|_p^p \ge S_\alpha$，我们有

$$\begin{aligned}
S_1 = S &= \|\mu\|_{var} + \mu_\infty && \text{(由 (10.51) 式)}\\
&\ge \|D^m u\|_p^p + S\textstyle\sum_{J\cup\infty}(\nu_j)^\theta && \text{(引理 10.10 }(\beta))\\
&\ge S_\alpha + S\big(\textstyle\sum_{J\cup\infty}\nu_j\big)^\theta && (0<\theta<1)\\
&= S_\alpha + S(1-\alpha)^\theta && \text{((10.52) 及引理 10.10 }(\alpha))\\
&= S_\alpha + S_{1-\alpha} && (S_\beta\text{ 的齐次性条件})
\end{aligned}$$

因而 α 取 0 或 1 (否则与 S_β 的严格次可加性条件矛盾).

若 $\alpha = 0$，则由于 $0 < \theta < 1$，ν_∞ 及诸 ν_j 中至多有一个不为零，否则将成立严格不等式 $S_1 > S_\alpha + S_{1-\alpha}$，仍与 S_β 的严格次可加性条件矛盾. 若 $\nu_1 \ne 0$，

根据 (10.52)，$\nu_1 = 1$，但依 (10.50)，我们须有 $\nu_1 = 1/2$，矛盾；若 $\nu_\infty = 1$，则 $\nu = 0$，将导致 $Q_k(1) \to 0$，仍与 (10.50) 矛盾，故 $\|u\|_q^q = 1$.

由 $\|u\|_q^q = 1$ 推知 $\|D^m u\|_p^p \geq S_1$. 但依定理 1.3 (定理 1.24 若 $p = 1$),

$$\|D^m u\|_p^p \leq \varliminf_k \|D^m u_k\| = S,$$

故 $\|D^m u\|_p^p = S$，即 $u \in \mathcal{D}^{m,p}$ ($u \in \mathcal{BV}^m$ 若 $p = 1$) 是 S 的极值函数. □

注记 10.1 当 $p = 1$ 时，我们不能指望 S 的极值函数仍属于 $\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$，例如当 $m = 1, p = 1$ 时，极值函数为球 B_R 的特征函数 χ_{B_R}，最佳常数 $S = n(\omega_{n-1}/n)^{1/n}$，最佳 Sobolev 不等式给出通常的等周不等式 (见 Aubin [2, 5], Talenti [197]).

五、一个全局紧性结论

本目讨论凝聚紧性引理在有界区域上的推论. 本目中我们假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是 $n \geq 3$ 维有界区域，在 Sobolev 不等式中，考虑 $p = 2$, $q = 2n/(n-2)$ 时的情形，遵照习惯，将 q 写作 N.

1. 有界区域上最佳 Sobolev 常数的极小化序列.

我们知道，由于伸缩不变性，最佳 Sobolev 常数与区域无关. 设 $u_k \in H_0^1(\Omega)$ 是最佳 Sobolev 常数 $S = S_{n,2}$ 的一极小化序列，满足

$$\|\nabla u_k\|_2^2 = S + o(1), \quad \|u_k\|_N = 1. \tag{10.53}$$

定理 10.11 *设 $\{u_k\} \subset H_0^1(\Omega)$ 满足 (10.53)，则存在 $\{u_k\}$ 的子列，仍记为 $\{u_k\}$，及 $x_0 \in \bar{\Omega}$，使得*

$$|u_k|^N \xrightarrow{\text{tight}} \delta_{x_0}, \quad |\nabla u_k|^2 \xrightarrow{\text{tight}} S\delta_{x_0}.$$

证明 因 $\{u_k\} \subset H_0^1(\Omega) \subset \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ 有界，不妨假设在 $\mathcal{D}^{1,2}$ 中及在 L^N 中，$|u_k| \xrightarrow{w} u$. 我们有 $v \equiv 0$，否则 v 将在包含 Ω 的某个球域 B 上满足 $-\Delta u = u^{N-1}$，这与 Pohozaev 恒等式矛盾. 根据引理 10.10，我们有

$$|u_k|^N \xrightarrow{\text{tight}} \nu = \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}, \quad |\nabla u_k|^2 \xrightarrow{\text{tight}} \mu \geq S \sum_{j\in J} \nu_j^\theta \delta_{x_j}, \tag{10.54}$$

这里的收敛之所以是胎紧收敛，沿用引理 10.10 的记号，是因为 $\nu_\infty = \mu_\infty = 0$.

由于 S_β 的齐次性，参考定理 10.6 的证明可见，ν 及 μ 都是单子，且 $\nu=\delta_{x_0}$. 根据 (10.54) 的后一式，$\mu\geq S\delta_{x_0}$，这里必然成立等号，不然的话将与 $\{u_k\}$ 是 S 的极小化序列矛盾. 最后，$x_0\in\bar\Omega$，因为在 $\bar\Omega$ 外 u_k 均取零值. □

2. 一个全局紧性结论.

我们知道，$\mathbb{R}^n$ 上的问题

$$-\Delta u=u^{N-1},\ \ u>0\quad 在\ \mathbb{R}^n\ 上,\quad u\in D^{1,2} \tag{10.55}$$

有唯一一族解 (见 Gidas-Ni-Nirenberg [107])

$$\psi_{x_0,\sigma}=C_n\left(\frac{\sigma}{\sigma^2+|x-x_0|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}, \tag{10.56}$$

其中 $C_n=[n(n-2)]^{\frac{n-2}{4}}$. 它们均由解 $\psi=\psi_{0,1}$ 通过平移伸缩变换 $T^{-1}_{x_0,\sigma}\psi$ 得到，其中

$$T_{x_0,\sigma}u(x)=\sigma^{\frac{n-2}{2}}u(x_0+\sigma x).$$

$\psi_{x_0,\sigma}$ 同时也是最佳 Sobolev 常数的极值函数，$\|\nabla\psi_{x_0,\sigma}\|_2^2=\|\psi_{x_0,\sigma}\|_N^N=S^{n/2}$.

现在，回到 Brezis-Nirenberg 问题，

$$-\Delta u=u^{N-1}+\lambda u,\ u>0\quad 在\ \Omega\ 上,\quad u|_{\partial\Omega}=0, \tag{10.57}$$

它的变分泛函是

$$J_\lambda(u)=\frac{1}{2}\int\left\{|\nabla u|^2-\lambda u^2\right\}-\frac{1}{N}\int|u|^N.$$

泛函 J_λ 不满足 (P.S.) 条件，然而，破坏 (P.S.) 条件的泛函 J 的值是知道的. 记 $c^*=S^{n/2}/n$，我们有

定理 10.12 (Struwe [192]) 假定问题 (10.57) 无解. 设 $0\leq u_k\in H_0^1(\Omega)$ 是 J_λ 的一 (PS) 序列，即 $J_\lambda(u_k)\to c$，$J'_\lambda(u_k)\to 0$，则 c 是 c^* 的非负整数倍，即 $c=mc^*$.

证明 与原来证明不同，这里更直接地应用凝聚紧性原理. 证明分 4 完成.

1° 易证 u_k 在 $H_0^1(\Omega)\subset\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ 中有界，不妨设 u_k 在 $H_0^1(\Omega)$ 中弱收敛，因问题 (10.57) 无解，这个弱极限必然为零. 于是 $\|u_k\|_2\to 0$，故 u_k 满

足 $J_0(u_k) \to c$，$J_0'(u_k) \to 0$. 由于 $\|u\|_N$ 的平移伸缩不变性，存在一列变换 $T_k = T_{x_k,\sigma_k}$，其中 $x_k \in \Omega$，使得 $v_k = T_k u_k$ 满足

$$Q(1) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{y+B_1} |v_k|^N = \int_{B_1} |v_k|^N = \frac{1}{2} S^{n/2}, \tag{10.58}$$

据 $\|u\|_N$ 及 $\|\nabla u\|_2$ 的平移伸缩不变性，v_k 在 $\mathcal{D}^{1,2}$ 中有界，且 $J_0(v_k) \to c$，$J_0'(v_k) \to 0$ (在 $H^{-1}(\Omega_k)$ 中). 此处 $\Omega_k = \{(x - x_k)/\sigma_k : x \in \Omega\}$. 通过抽子列，不妨设

$$v_k \xrightarrow{w} v \quad \text{在 } \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \text{ 中}, \tag{10.59}$$

$$v_k \longrightarrow v \quad \text{在 } L^2_{loc}(\mathbb{R}^n) \text{ 中及 a.e. 于 } \mathbb{R}^n \text{ 中}, \tag{10.60}$$

此外，根据凝聚紧性原理，可设 (记 $\widehat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$)

$$|v_k|^N \xrightarrow{w} \lambda, \quad |\nabla v_k|^2 \xrightarrow{w} \mu \quad \text{在 } \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{R}}^n) \text{ 中},$$

其中 $\lambda = v^N + \sum_J \lambda_j \delta_{x_j}$，指标集 $J \subset \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. 由 $J_0'(v_k) \to 0$ 得

$$-\Delta v_k = v_k^{N-1} + \zeta_k \quad \text{在 } \Omega_k \text{ 上} \quad (\|\zeta_k\|_{H^{-1}} \to 0). \tag{10.61}$$

2° 用 v_k 乘 (10.61) 式，积分得

$$J_0(u_k) = J_0(v_k) = (1/n)\|v_k\|_N^N + o(1) \to c.$$

用 ξv_k 乘 (10.61) 式，ξ 为 $\widehat{\mathbb{R}}^n$ 上光滑函数，积分得

$$\int_{\mathbb{R}^n} \xi |\nabla v_k|^2 + \int_{\mathbb{R}^n} v_k \nabla\xi \nabla v_k = \int_{\mathbb{R}^n} \xi |v_k|^N + o(1). \tag{10.62}$$

对于每个 $j \in J$，取 $\xi = \xi_\varepsilon(x_j, x)$ 为命题 10.9 中的截断函数，若 $x_j = \infty$，则取 $\xi = \phi_R$ 为命题 10.8 中的截断函数，先令 $k \to \infty$，然后令 $\varepsilon \to 0$ (相应地 $R \to \infty$)，那么 (10.62) 左端第二项 $I_{k,\varepsilon(R)}$ 有如下估计

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\ (R)} \lim_k |I_{k,\varepsilon(R)}| &= \lim_{\varepsilon\ (R)} \left| \int_A v\nabla\xi\nabla v \right| && (\text{依 } (10.59), (10.60)) \\
&\le \lim_{\varepsilon\ (R)} \|\nabla v\|_{2,A} \|v\|_{N,A} \|\nabla\xi\|_{n,A} && (\text{Hölder 不等式}) \\
&\le \lim_{\varepsilon\ (R)} 2|B_1|^{1/n} \|\nabla v\|_{2,A} \|v\|_{N,A} = 0, && (\text{积分的绝对连续性})
\end{aligned}$$

其中 $A=\{x:\varepsilon\le|x|\le 2\varepsilon\}$（或 $A=\{x:R\le|x|\le 2R\}$）. 而 (10.62) 左端第一项及右端分别趋于 $\mu(x_j)$ 及 $\lambda(x_j)=\lambda_j$，于是，$\mu(x_j)=\lambda(x_j)$，从而由引理 10.10 (β) 得 $\lambda_j\ge S^{n/2}$.

因 $\lambda_j\ge S^{n/2}$ 及 (10.58)，λ 不含有限凝聚点，$J=\{\infty\}$ 或为空集，故

$$|v_k|^N \xrightarrow{w} v^N+\lambda_\infty\delta_\infty \quad 在\ \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{R}}^n)\ 中. \tag{10.63}$$

这一事实表明，在每个紧区域上，特别是在 B_1 上，$v_k\xrightarrow{s} v$ 在 L^N 中，因而 $\|v\|_{N,B_1}^N=\lim\|v_k\|_{N,B_1}^N=\frac{1}{2}S^{n/2}$，特别 $v\ne 0$. 我们断言

$$\sigma_k^{-1}\operatorname{dist}(x_k,\partial\Omega)\to\infty.$$

确实，因 v_k 弱收敛于 $v\ne 0$，必然有 $\sigma_k\to 0$，否则将导致问题 (10.57) 有解. 现用反证法证明断言. 设若 $\lim\sigma_k^{-1}\operatorname{dist}(x_k,\partial\Omega)<\infty$，那么 $\Omega_k\to\Omega_\infty$ 为一星形区域（若 Ω 光滑则 Ω_∞ 为超半空间），由 (10.61)，$v(\ne 0)$ 将在 Ω_∞ 上满足

$$-\Delta v=v^{N-1} \quad 在\ \Omega_\infty\ 上, \quad v|_{\partial\Omega_\infty}=0 \tag{10.64}$$

根据 Pohozaev 恒等式，$v\equiv 0$，矛盾. 因此 $\sigma_k^{-1}\operatorname{dist}(x_k,\partial\Omega)\to\infty$，$\Omega_\infty=\mathbb{R}^n$，根据唯一性，$\|\nabla v\|_2^2=\|v\|_N^N=S^{n/2}$.

3° 用 ξv 乘 (10.64)，ξ 为光滑函数，积分，然后与 (10.62) 相减，得

$$\int\xi\Big\{|\nabla v_k|^2-|\nabla v|^2\Big\}=I_{\xi,k}+II_{\xi,k}+o(1), \tag{10.65}$$

其中

$$I_{\xi,k}=\int\xi\Big\{|v_k|^N-|v|^N\Big\}, \quad II_{\xi,k}=-\int\nabla\xi\Big\{v_k\nabla v_k-v\nabla v\Big\}.$$

如果 $\lambda_\infty=0$，取 $\xi=1$，那么 $II_{\xi,k}=0$，而 $I_{\xi,k}\to 0$（依 (10.63)），于是 (10.65) 给出 $\|\nabla v_k\|_2\to\|\nabla v\|_2$，与 (10.59) 结合，就意味着 $\|v_k-v\|_{\mathcal{D}^{1,2}}\to 0$，从而 $J_0(u_k)=J_0(v_k)\to J_0(v)=c^*$.

如果 $\lambda_\infty>0$，则 v_k 是一 L^N 两分序列，则任取 $\xi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$，那么 $I_{\xi,k}\to 0$（依 (10.63)），$II_{\xi,k}\to 0$（依 (10.59) 及 (10.60)）. 因此 (10.65) 左端趋于零，与 (10.59) 及 (10.60) 结合可得 $\xi v_k\xrightarrow{s}\xi v$ 在 $\mathcal{D}^{1,2}$ 中，特别，取一列 $\xi_i=1-\phi(\cdot/i)$，其中 ϕ 由 (10.39) 定义，这样 $\xi_i v\xrightarrow{s} v$ 在 $\mathcal{D}^{1,2}$ 中. 因

$$\lim_i\lim_k\|\xi_i v_k-v\|_{\mathcal{D}^{1,2}}=0, \quad \lim_i\lim_k\|v_k\|_{\mathcal{D}^{1,2},A_i}=0,$$

其中 $\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}}=\|\nabla u\|_2+\|u\|_N$，$A_i=\{x: i\le|x|\le 2i\}$. 故可抽得子列使得

$$\|\xi_i v_{k_i}-v\|_{\mathcal{D}^{1,2}}\to 0,\qquad \|v_{k_i}\|_{\mathcal{D}^{1,2},A_i}\to 0. \tag{10.66}$$

将子列 v_{k_i} 重新命名为 v_i，记 $v_i^1=\xi_i v_i$，$v_i^2=(1-\xi_i)v_i$，则 v_i^1, $v_i^2\ge 0$. 一方面我们有 $J_0'(v_i^1)\to 0$，$J_0(v_i^1)\to c^*$，另一方面由 (10.61) 及 (10.66) 可得，$J_0'(v_i^2)\to 0$，且，$J_0(v_i^2)=J(v_i)-J(v_i^1)+o(1)\to c-c^*$. 回到 Ω 上，

$$J_0'(u_i^2)\to 0,\quad J_0(u_i^2)\to c-c^*, \tag{10.67}$$

其中 $u_i^j=T_i^{-1}v_i^j$ $(j=1.2)$. 我们也不妨假设 $u_i^2\xrightarrow{w}0$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中.

4° 下面用归纳法完成证明.

当 $c\in[c^*,2c^*)$ 时，$\lambda_\infty=0$，在第 3° 步已证得 $J_0(u_k)\to c=c^*$，故命题对 $m=1$ 成立.

假定命题对于 $c\in\big[(m-1)c^*,mc^*\big)$ 成立. 现设 $c\in\big[mc^*,(m+1)c^*\big)$. 依 (10.67) 及归纳假设，$c-c^*=(m-1)c^*$，即 $c=mc^*$. □

第四节 奇异积分不等式

一、Hardy 不等式及其推广

1. Hardy 不等式及其证明. 1919 年，Hardy 在他的论文 [110] 中发表了一个后来影响深远的不等式

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^2}{|x|^2}\mathrm{d}x\le C_{n,2}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2\mathrm{d}x,\quad \forall\, u\in\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n), \tag{10.68}$$

其中 $n>2$，$C_{n,2}=\left[\frac{2}{n-2}\right]^2$. 一般来说，

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^p}{|x|^p}\mathrm{d}x\le C_{n,p}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^p\mathrm{d}x,\quad \forall\, u\in\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n), \tag{10.69}$$

其中 $1\le p<n$，$C_{n,p}=\left[\frac{p}{n-p}\right]^p$. 不等式 (10.69) 中的常数 $C_{n,p}$ 是最佳的，而且，除非 $u\equiv 0$，成立严格不等式.

现在，我们准备给出不等式 (10.69) 的证明．为此，我们需要一个同样著名的一维 Hardy 不等式 (参见文献 [111] 及 [113])

$$\int_0^\infty |u|^p t^\beta \,\mathrm{d}t \le C_{p,\beta} \int_0^\infty |u'|^p t^{\beta+p} \,\mathrm{d}t, \quad \forall\, u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+), \tag{10.70}$$

其中 $\beta > -1$．可以这样来证明 (10.70)，先分部积分，然后应用 Hölder 不等式 (参见 Hardy-Littlewood-Pólya [113])．

Hardy 不等式 (10.69) 的证明

当 u 是球面对称函数时，不等式 (10.69) 转化为一维不等式 (10.70)，对应于 $\beta = n - p - 1$．设 u^* 是 $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 的球面单减对称重排，则

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^p \,\mathrm{d}x}{|x|^p} &\le \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u^*|^p \,\mathrm{d}x}{|x|^p} && (\text{定理 } 1.32\,) \\
&\le C_{n,p} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^*|^p \,\mathrm{d}x && (u^* \text{ 径向对称}) \\
&\le C_{n,p} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x && (\text{Pólya-Szegö})
\end{aligned}$$

2. **Hardy 不等式的高阶推广**.

Hardy 不等式 (10.69) 有许多不同的推广，一种高阶形式的推广是，

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^p \,\mathrm{d}x}{|x|^{mp}} \le C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^m u|^p \,\mathrm{d}x \quad \forall\, u \in \mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n), \tag{10.71}$$

其中 $m \ge 1$ 是整数，$1 \le p < \frac{n}{m}$，而 ∇^m 则由 21 页 (1.16) 定义．当 $p > 1$ 时，不等式 (10.71) 的右端可换作等价范数 $\|D^m u\|_p^p$ (见第 21 页)．

由 (10.69) 到 (10.71) 的第一个推广是 Rellich 在 1956 年的一篇文章中作出的 (见 Davies [85], Gazzola [104])，对应于 (10.71) 在 $m = 2, p = 2$ 的情形．

不等式 (10.71) 的证明　由稠密性，只须假设 $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$．令

$$f = (-\Delta)^{m/2} u \quad m \text{ 为偶数}, \quad f = (-\Delta)^{(m-1)/2} u \quad m \text{ 为奇数},$$

记 $\Omega = \operatorname{sppt} u$，记 $v \in W_0^{k,p}(\Omega^*)$ $(k = [m/2])$ 为下列方程的解：

$$(-\Delta)^k v = f^*.$$

这里 f^* 表示 f 的球面单减对称重排. 根据 Talenti 比较原理 (见 第 37 页命题 1.39, 也见 Talenti [197]), $u^* \le v$ a.e. 于 $\mathbb{R}^n$. 当 m 为偶数时,

$$\begin{aligned}\|\nabla^m u\|_p &= \|(-\Delta)^{m/2}u\|_p = \|f\|_p \\ &= \|f^*\|_p = \|(-\Delta)^{m/2}v\|_p = \|\nabla^m v\|_p,\end{aligned}$$

当 m 为奇数时,

$$\|\nabla^m u\|_p = \|\nabla f\|_p \ge \|\nabla f^*\|_p = \|\nabla^m v\|_p$$

因此, 依据函数对称重排的 Hardy 不等式 (定理 1.32) 及 Talenti 比较原理得

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^p \mathrm{d}x}{|x|^{mp}} \le \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u^*|^p \mathrm{d}x}{|x|^{mp}} \le \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v|^p \mathrm{d}x}{|x|^{mp}}.$$

因而, 只须就球面对称函数证明不等式 (10.71). 对于球面对称函数 $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, 应用一维不等式 (10.70), 我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v|^p |x|^\beta \mathrm{d}x \le C_{p,\beta} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^p |x|^{\beta+p} \mathrm{d}x,$$

其中 $\beta > -n$, $1 \le p < \infty$. 据此, 当 $mp < n$ 时,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v|^p \mathrm{d}x}{|x|^{mp}} &\le C_1 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla v|^p \mathrm{d}x}{|x|^{(m-1)p}} \le C_2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla^2 v|^p \mathrm{d}x}{|x|^{(m-2)p}} \\ &\le \cdots\cdots\cdots\cdots \le C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^m v|^p \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

故不等式 (10.71) 成立. □

不等式 (10.71) 的另一证明 当 $p > 1$ 时, 我们也可用到 Lorentz 空间的概念及性质给出 (10.71) 的另一证明. 记 $q = \frac{np}{n-mp}$, 对于 $u \in \mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, 根据 Lorentz 空间形式的 Sobolev 不等式 (见 (1.44) 式), 我们有 $u \in L^{q,p}$, 且

$$[u]_{q,p} \le C\|D^m u\|_p,$$

另一方面, $u \in L^{q,p} \Longrightarrow |u|^p \in L^{q/p,1}$; 而 $|x|^{-mp} \in L^{n/(mp),\infty}$, 注意到 $(q/p)' = n/mp$, $(1)' = \infty$, 应用 Lorentz 空间模式下的 Hölder 不等式 (见 (1.41) 式)

$$\begin{aligned}\|\, |u|^p |x|^{-mp}\|_{L^1} &\le [\, |u|^p]_{(q/p),1} \,[\, |x|^{-mp}]_{n/(mp),\infty} \\ &\le C_1 [u]_{q,p} \le C\|D^m u\|_p.\end{aligned}$$

当 $p > 1$ 时，上述不等式就是 (10.71). □

将不等式 (10.71) 与 Hölder 不等式及 Sobolev 不等式相结合便得下列 Hardy-Sobolev 不等式：

$$\Lambda\left(\int \frac{|u|^q \,\mathrm{d}x}{|x|^r}\right)^{1/q} \le \left(\int |D^m u|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}, \quad \forall\, u \in \mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n). \tag{10.72a}$$

其中 $p < q < np/(n - mp)$，$1 \le p < q < n/m$，$m \ge 1$；而 r 则满足

$$\frac{n-r}{q} = \frac{n-mp}{p} \quad 或 \quad r = n - \frac{q(n-mp)}{p}. \tag{10.72b}$$

二、最佳 Hardy-Sobolev 常数的极值函数

1. 极值函数的存在性.　不等式 (10.72) 表明，齐次 Sobolev 空间 $\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ 可以连续地嵌入到加权空间 $L^q(\mathbb{R}^n, |x|^{-r}\,\mathrm{d}x)$. 本节的主要任务是证明不等式 (10.72) 中最佳常数 Λ 存在极值函数，也就是说，条件极值问题

$$\Lambda = \inf\{\, \|D^m u\|_p^p : u \in \Sigma\} \tag{10.73a}$$

具有解. 这里约束条件为

$$\Sigma = \{u \in \mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n) : \textstyle\int |u|^q |x|^{-r}\,\mathrm{d}x = 1\}. \tag{10.73b}$$

须指出，极值问题 (10.73) 不是平移不变的，但它是伸缩不变的，确切地说，

$$极值泛函\ \mathcal{E}(u) = \|D^m u\|_p^p \quad 及约束泛函\ \mathcal{J}(u) = \textstyle\int |u|^q |x|^{-r}\,\mathrm{d}x$$

在变换 $u \to \sigma^{(r-n)/q} u(\cdot/\sigma)$ 下保持不变. 因而，极值问题 (10.73) 的极小化序列一般不会在 Σ 中相对列紧.

我们注意，如果将约束 Σ 换作 Σ_β，即约束条件中用 β 取代 1，相应的下确界记作 Λ_β，则 $\Lambda_\beta = \beta^{p/q}\Lambda_1 = \beta^{p/q}\Lambda$. 故 Λ_β 满足严格次可加性条件

$$\Lambda_{\alpha+\beta} < \Lambda_\alpha + \Lambda_\beta, \quad \alpha, \beta > 0. \tag{S}$$

定理 10.13　极值问题 (10.73) 的任一极小化序列 u_k 都可经过适当的伸缩变换

$$\widetilde{u}_k \triangleq \sigma_k^{-(n-r)/q} u_k(\cdot/\sigma_k), \quad \sigma_k > 0,$$

使得新的极小化序列 $\widetilde{u}_k$ 在 $E^{m,p}$ 中相对列紧，而问题 (10.73) 有一极小解.

证明 证明的关键是将要介绍的凝聚紧性引理，引理 10.14. 设 u_k 是极值问题 (10.73) 的一极小化序列，引进凝聚函数列

$$Q_k(t) = \sup_y \int_{y+B_t} |u_k|^q |x|^{-r} \, \mathrm{d}x.$$

由伸缩不变性，可选一列正数 σ_k，使得新极小化列 $\widetilde{u}_k \triangleq \sigma_k^{-(n-r)/q} u_k(\cdot/\sigma_k)$，改记为 u_k，满足

$$Q_k(1) = 1/2. \tag{10.74}$$

我们需证明 $\|u\|_q^q = 1$. 设 $\|u\|_q^q = \alpha$，则 $\|D^m u\|_p^p \geq S_\alpha$，我们有

$$\begin{aligned}
S_1 = S &= \|D^m u\|_p^p + \|\nu_2\|_{var} + \mu_\infty && \text{引理 10.10 之 } (\beta) \\
&\geq \|D^m u\|_p^p + S\big(a_0^\theta + \lambda_\infty^\theta\big) && \text{引理 10.10 之 } (\gamma) \\
&\geq S_\alpha + S\big(\lambda_\infty + a_0\big)^\theta && 0 < \theta < 1 \\
&= S_\alpha + S(1-\alpha)^\theta && \text{引理 10.10 之 } (\beta) \\
&= S_\alpha + S_{1-\alpha} && S_\beta \text{ 的齐次性条件}
\end{aligned}$$

因而 α 取 0 或 1，否则与 S_β 的严格次可加性条件矛盾.

若 $\alpha = 0$，则由于 $0 < \theta < 1$，λ_∞ 及 a_0 两者中至多有一个不为零，否则将成立严格不等式 $S_1 > S_\alpha + S_{1-\alpha}$，仍与 S_β 的严格次可加性条件矛盾. 故当 $k \to \infty$ 时，$|u_k|^q |x|^{-r}$ 的值要么分布在 $x = 0$ 附近 ($a_0 = 1$)，要么分布在 $x = \infty$ 附近 ($\lambda_\infty = 1$). 若设 $y_k \in \mathbb{R}^n$ 是 $Q_k(1)$ 的取值“中心”，即

$$Q_k(1) = \int_{y_k + B_1} |u_k|^q |x|^{-r} \, \mathrm{d}x.$$

y_k 必然有界. 不然有子列 $|y_k| \to \infty$. 记 $q^* = \frac{np}{n-mp}$，此时

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} = Q(1) &= \int_{y_k + B_1} \frac{|u_k|^q \, \mathrm{d}x}{|x|^r} \\
&\leq \frac{\mathrm{Vol}^{(q^*-q)/q^*}(B_1)}{(|y_k| - 1)^r} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_k|^{q^*} \, \mathrm{d}x \right)^{q/q^*} \to 0,
\end{aligned}$$

这个矛盾说明 y_k 有界. 因此，由 (10.74) 推知，$a_0 = 1$，即 $\nu_1 = \delta_0$. 但这与 (10.74) 矛盾. 所以 $\alpha = 1$. □

2. Hardy-Sobolev 不等式下的凝聚紧性引理.

设 $\{u_k\}$ 是 $\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ 中的有界列，定义

$$\nu_\infty \triangleq \lim_{R\to\infty}\overline{\lim_{k\to\infty}}\int_{|x|>R}|u_k|^q\frac{\mathrm{d}x}{|x|^r}, \tag{10.75}$$

$$\mu_\infty \triangleq \lim_{R\to\infty}\overline{\lim_{k\to\infty}}\int_{|x|>R}|D^m u_k|^q\mathrm{d}x. \tag{10.76}$$

引理 10.14　设函数列 $\{u_k\}$ 在 $\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ 有界，且 $u_k \xrightarrow{w} u$ 在 $L^{\frac{np}{n-mp}}(\mathbb{R}^n)$ 中. 记 $\theta_k = u_k - u$. 假定存在两个正则有限测度 μ 及 ν 满足

$$|\theta_k|^q|x|^{-r} \xrightarrow{v} \nu \quad \text{及} \quad |D^m u_k|^p \xrightarrow{v} \mu \quad \text{在 } \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \text{ 中}. \tag{10.77}$$

记 $\theta = p/q$，其中 m, p, q, r 满足 (10.72b). 那么，通过抽取 $\{u_k\}$ 的子列，我们有如下结论

(α)　　$\nu = \nu_0\delta_0, \quad \nu_0 \geq 0;$

(β)　　$|D^m u|^p + \Lambda(\nu_0)^\theta\delta_0 \leq \mu, \quad \Lambda(\nu_\infty)^\theta \leq \mu_\infty.$

证明　引理 10.14 的证明与 Sobolev 不等式下的凝聚紧性引理，引理 10.10 的证明几乎完全相同，所不同的只是论断 (α)，现在证明之.

通过抽子列，我们可进一步假设上一节中 $\{u_k\}$ 的收敛性条件 (10.35)—(10.37) 成立 (当 $p = 1$ 时 (10.36′) 成立). 由于嵌入 $\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ 的局部紧致性，我们有

$$\begin{aligned} &u_k \xrightarrow{s} u \qquad \text{在 } L^q_{loc}(\mathbb{R}^n) \text{ 中} \\ &u_k \xrightarrow{\text{a.e.}} u \qquad \text{在 } \mathbb{R}^n \text{ 中} \end{aligned} \tag{10.78}$$

给定 $\varphi \in \mathcal{D}_+(\mathbb{R}^n)$，在加权空间 $L^q(\mathbb{R}^n, \varphi|x|^{-r})$ 上应用 Brezis-Lieb 引理，得

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi|u_k|^p\mathrm{d}x}{|x|^r} = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi|u|^p\mathrm{d}x}{|x|^r} + \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi|\theta_k|^p\mathrm{d}x}{|x|^r} + o(1)_\varphi.$$

故有

$$|u_k|^q|x|^{-r} \xrightarrow{v} |u|^q|x|^{-r} + \nu \triangleq \lambda \quad \text{在 } \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \text{ 中}. \tag{10.79}$$

顶多再次抽取子列，我们可设

$$|D^m\theta_k|^p \xrightarrow{v} \mu_1 \qquad \text{在 } \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \text{ 中}. \tag{10.80}$$

给定 $\xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$，易见 $\xi\theta_k \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$，由 Hardy-Sobolev 不等式 (10.72) 得

$$\Lambda^{1/p}\left(\int |\xi\theta_k|^q \frac{\mathrm{d}x}{|x|^r}\right)^{1/q} \le \left(\int |D^m(\xi\theta_k)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

与 不等式 (10.44) 的证明几乎完全相同，顶多再抽子列，我们有

$$\Lambda^{1/p}\left(\int |\xi|^q|\theta_k|^q \frac{\mathrm{d}x}{|x|^r}\right)^{1/q} \le \left(\int |\xi|^p|D^m\theta_k|^p dx\right)^{1/p} + o(1). \tag{10.81}$$

在上式中令 $k \to \infty$，由 (10.77) 及 (10.80) 得

$$\Lambda^{1/p}\left(\int |\xi|^q d\nu\right)^{1/q} \le \left(\int |\xi|^p d\mu_1\right)^{1/p}, \quad \xi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

应用引理 10.1 得

$$\nu = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j \delta_{x_j} \quad 且 \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\nu_j|^\theta < \infty, \tag{10.82}$$

其中 $\nu_j \ge 0$. 在任意紧区域 $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上，根据 (10.78)，我们有 $|\theta_k|^q|x|^{-r} \xrightarrow{s} 0$ 在 $L^1(\Omega)$ 中，因而从 (10.79) 中看出，$|\nu|(\Omega) = 0$. 故若 $x_j \neq 0$，则必然 $\nu_j = 0$. □

注记 10.2 当 $m = 1$ 时，可通过对称化及常微分方程的方法，求得问题 (10.73) 的最佳常数 Λ，可参见 Lieb [135].

注记 10.3 不等式 (10.72) 及定理 10.13 有多种推广，比如将势函数 $|x|^{-r}$ 换作更一般的函数 K，

$$\lim_{x\to 0} K(x)|x|^{-r} = \alpha \ge 0, \qquad \lim_{x\to\infty} K(x)|x|^{-r} = \beta > 0.$$

注记 10.4 当 $p = q$ 时，易见 $\Lambda_\beta = \beta\Lambda$，$\Lambda_\beta$ 不满足严格次可加性条件，这里的方法不再适用. 但同时，极值问题 (10.73) 也没有解.

三、关于 HARDY 不等式的若干注记

近年来，人们对 Hardy 不等式进行了更深入的研究，发现了新的应用，对此，这里作一些注记.

注记 10.5 Hardy 不等式 (10.69) 中的常数 $C_{n,p} = \left[\frac{p}{n-p}\right]^p$ 是最佳的，这一事实直到 1995 年才为文献 Peral-Vazquez[167] 所证．此外，对于 $0 \neq u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$，Hardy 不等式 (10.69) 成立严格不等式．

注记 10.6 当 $n = 2$ 时，没有相应于 (10.68) 与 (10.69) 的不等式．但当 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为包含原点 o 的有界区域时，沈尧天证明（见文献 [238]）

$$\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^2}\Big(\log\frac{R}{|x|}\Big)^{-2}\mathrm{d}x \leq 4\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x, \quad \forall\, u \in W_0^{1,2}(\Omega), \tag{10.83}$$

其中 R 是包含 Ω 的最小球 $B_R(0)$ 的半径．这里常数 4 也是最佳的，对非零函数而言，成立严格不等式．

注记 10.7 设 Ω 是包含原点 o 的有界 $n \geq 2$ 维区域．将不等式 (10.68), (10.69) 与不等式 (10.83) 联系在一起，写成如下不等式

$$\int_\Omega |\nabla u|^p - \left(\frac{n-p}{p}\right)^p \int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^p} \geq C\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^p}\Big(\log\frac{R}{|x|}\Big)^{-\gamma}, \tag{10.84}$$

其中 R 是足够大的常数．Adimurthi-Sandeep [15] 证明，不等式 (10.84) 在以下两种情形成立：(i) 当 $1 < p < n$ 且 $\gamma \geq 2$ 时；(ii) 当 $p = n$ 且 $\gamma \geq n$ 时．在情形 (i)，如果 $p = 2$, $\gamma = 2$，则 $C = 1/4$；在情形 (ii)，则 $C = (\frac{n-1}{n})^n$.

最后，关于 Hardy 不等式在偏微分方程问题中的应用，可参见 Cao-Li [64]，沈尧天 [238] 等及其参考文献．

附录A　线性二阶椭圆方程

本章列出线性二阶椭圆方程的一些基本估计，除 Brezis-Kato 正则化引理外，其余材料都可从 Gilbarg-Trudinger [106] 中找到或推出.

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是 $n \geq 2$ 维有界区域. 本章讨论如下算子

$$Lu = a^{ij}\partial_i\partial_j u + b^i\partial_i u + cu, \tag{A.1}$$

其中 $a^{ij} = a^{ji}, b^i$ 及 c 都是 Ω 上的实函数. 我们说 L 是

1）椭圆的, 如果系数矩阵 $A(x) = \left(a^{ij}(x)\right)$ 在 Ω 上是正定的;

2）严格椭圆的，如果系数矩阵 $A(x)$ 的最小特征值 $\lambda(x) \geq \lambda_0$, 其中 $\lambda_0 > 0$ 是常数;

3）一致椭圆的，如果 $A(x)$ 的最大特征值 $\Lambda(x)$ 及最小特征值 $\lambda(x)$ 恒正，且 $\Lambda(x)/\lambda(x)$ 在 Ω 上有界.

一、古典极大值原理

在本目中，我们假定 $|b^i(x)/\lambda(x)| \leq \text{const}$ 有界，并不强调 L 系数的光滑性. 先介绍

定理 A.1 (弱极大值原理)　设 L 在 Ω 中是椭圆的，且 $c = 0$. 如果 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 满足

$$Lu \geq 0 \quad (Lu \leq 0) \quad 在\ \Omega\ 中,$$

则 u 在 $\overline{\Omega}$ 的最大值（相应地最小值）在 $\partial\Omega$ 上达到.

定理 A.2 (Hopf 强极大值原理)　设 L 在 Ω 中是一致椭圆的，$c \leq 0$ 且 c/λ

有界. 如果 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 满足,

$$Lu \geq 0 \quad (Lu \leq 0) \quad 在\ \Omega\ 中,$$

则 u 在 Ω 内不能达到非负最大值 (非正最小值), 除非 u 恒等于常数.

当 $u|_{\partial\Omega} = 0$ 时，定理 A.2 中 $c \leq 0$ 的限制可去掉（见 Serrin [183]）.

二、Schauder 估计

在椭圆方程的理论中, Schauder 估计占有非常重要的地位, 这部分内容可在 Gilbarg-Trudinger [106] 中找到. 为方便起见, 设 L 的系数都是 $\overline{\Omega}$ 上指数为 α 的 Hölder 连续函数，并且存在正常数 λ 与 Λ 使得在 $\bar{\Omega}$ 上有

$$\lambda(x) \geq \lambda \text{ 且 } \max\{\, \|a^{ij}\|,\ \|b^i\|,\ \|c\|\,\}_{C^\alpha(\Omega)} \leq \Lambda. \tag{A.2}$$

我们将 Schauder 内估计和边界估计合写成如下

定理 A.3 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域, 具有 $C^{2,\alpha}$ 部分边界 $T \subset \partial\Omega$. 算子 L 的系数满足条件 (A.2). 设 $u \in C^{2,\alpha}(\Omega \cup T)$ 满足

$$\begin{cases} Lu = f & 在\ \Omega\ 中, \\ u = 0 & 在\ T\ 上, \end{cases}$$

其中 $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, 则对任意子区域 $\omega \subset \Omega$, 只要 $\bar{\omega} \subset \Omega \cup \mathring{T}$ 就有

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\omega})} \leq C\left(\|u\|_{C(\overline{\Omega})} + \|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}\right).$$

这里 $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda, \omega)$ 是常数. $\mathring{T}$ 是部分边界 T 的内部.

由此可推得

定理 A.4 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是具有 $C^{2,\alpha}$ 边界的有界区域. 又设 $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ 满足

$$\begin{cases} Lu = f & 在\ \Omega\ 中, \\ u = 0 & 在\ \partial\Omega\ 上, \end{cases}$$

其中 L 满足条件 (A.2), $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$. 则存在常数 $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda, \Omega)$ 使得

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\left(\|u\|_{C(\overline{\Omega})} + \|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}\right).$$

根据 Schauder 先验估计, 运用连续性方法可证明下列

定理 A.5 (存在唯一性定理) 在定理 A.4 的条件下, 若进一步假设设 $c \leq 0$, 则 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} Lu = f & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{cases}$$

存在唯一解 $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

三、弱解

讨论散度型的椭圆算子:

$$Lu = \partial_i(a^{ij}\partial_j u + b^i u) + c^i \partial_i u + du, \tag{A.3}$$

其中 L 的诸系数都是有界区域 Ω 上的可测函数. 我们假定 (A.3) 中 L 的诸系数是有界可测的. 算子 L 在几乎处处的意义下, 根据对称矩阵 $a^{ij}(x)$ 的不同情况分别有椭圆、严格椭圆、一致椭圆等分类, 这些概念与本附录开初所述一致.

我们说 $u \in H^1(\Omega)$ 在弱的意义下满足

$$Lu = 0 \quad (\geq 0, \ \leq 0),$$

如果对一切非负检验函数 $v \in C_0^\infty(\Omega)$ 成立

$$-\int_\Omega (a^{ij}\partial_j u + b^i u)\partial_i v - (c^i \partial_i u + du)\, v = 0 \quad (\geq 0, \ \leq 0).$$

我们说算子 L 是强制的, 如果存在常数 $\mu > 0$ 使得对一切 $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega (a^{ij}\partial_j u + b^i u)\partial_i u - (c^i \partial_i u + du)\, u \geq \mu \int_\Omega u^2.$$

我们说 $u \in H_0^1(\Omega)$ 是问题

$$Lu = f \quad \text{于 } \Omega \text{ 中}, \qquad u = 0 \quad \text{于 } \Omega \text{ 上}$$

的弱解, 如果对一切 $v \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega -(a^{ij}\partial_j u + b^i u)\partial_i v + (c^i \partial_i u + du) v = \int_\Omega f\, v.$$

四、弱解的极大值原理

古典意义下的极大值原理可以推广到散度形式的算子. 在叙述这种形式的极大值原理时，我们需要明确 Sobolev 空间 $H^1(\Omega)$ 中函数 u 在边界 $\partial\Omega$ 上不等的意义.

我们说 u 在 $\partial\Omega$ 上满足 $u \geq 0$，如果它的正部 $u^+ = \max\{u, 0\} \in H_0^1(\Omega)$.

此外，函数在边界上的上确界 $\sup_{\partial\Omega} u = \inf\{\mu : u \leq \mu \text{ 于} \partial\Omega, \mu \in \mathbb{R}\}$.

定理 A.6 (弱极大值原理)　设 L 在有界区域 Ω 上是椭圆的，强制的. 如果 $u \in H^1(\Omega)$ 满足 $Lu \geq 0 \quad (\leq 0)$，则

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \qquad (\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-).$$

特别，若 $u \in H_0^1(\Omega)$ 满足 $Lu \geq 0 \quad (\leq 0)$，则则在 Ω 上 $u \leq 0 \ (\geq 0)$. $u \equiv 0$ 当且仅当 $Lu \equiv 0$.

用 Lax-Milgram 定理不难证明

定理 A.7 (存在唯一性定理)　在定理 A.6 的条件下，再设 $f \in L^2(\Omega)$，则下列 Dirichlet 问题存在唯一解 $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{cases} Lu = f & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 中}. \end{cases}$$

注记 A.1　定理 A.7 中有关 L 及 f 的条件可以在很大程度上减弱. 例如对于算子 $-L = -\Delta u + au$，在假设 L 强制，$a \in L^{n/2}$，$f \in L^{2n/(n+2)}$ 的条件下，方程 $-L = f$ 有唯一解 $u \in H_0^1$，并且 u 按 H_0^1 拓扑连续地依赖于 $f \in L^{2n/(n+2)}$. 这些结论均可由 Lax-Milgram 定理推证.

定理 A.8 (强极大值原理)　设 L 在 Ω 中是严格椭圆的，其系数有界，且

$$\int_{\Omega} \left(dv - b^i \partial_i v\right) \leq 0, \quad \forall\, 0 \leq v \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

设 $u \in H^1(\Omega)$ 满足 $Lu \geq 0 \quad (\leq 0)$. 那么，如果对于某个球 $B \subset\subset \Omega$ 有

$$\sup_{B} u = \sup_{\Omega} u \geq 0 \quad (\inf_{B} u = \inf_{\Omega} u \leq 0),$$

则 u 在 Ω 内必为常数.

注记 A.2　在定理 A.8 的条件下，设 $u \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ 满足 $Lu \geq 0$ (≤ 0)，则 u 在 Ω 内不能达到非负最大值 (非正最小值)，除非它是常数.

五、L^p 估计

在本目中，我们设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域，算子

$$Lu = a^{ij}\partial_i\partial_j u + b^i\partial_i u + cu$$

是一致椭圆的，具有 L^∞ 系数，实数 $p > 1$.

定理 A.9 设区域 Ω 有部分 $C^{0,1}$ 类边界 $T \subset \partial\Omega$, 算子 L 是一致椭圆的. $C(\bar{\Omega}) \ni c \leq 0$ 且 a^{ij}, $b^i \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$. 又设 $f \in L^p(\Omega)$. 若 $u \in W^{2,p}(\Omega)$ 满足

$$\begin{cases} Lu = f & \text{在 } \Omega \text{ 中} \\ u = 0 & \text{在 } T \text{ 上} \end{cases}$$

那么, 对 Ω 的任意子区域 ω, 只要 $\bar{\omega} \subset \Omega \cup \mathring{T}$ 就有

$$\|u\|_{2,p,\omega} \leq C\big(\|u\|_{p,\Omega} + \|f\|_{p,\Omega}\big),$$

其中 C 是不依赖于 f 的常数, C 只依赖于 n, p, Ω, ω, T 及系数矩阵 $A = (a^{ij})$.

定理 A.10 设 L 是 $C^{0,1}$ 区域 Ω 上的一致椭圆算子，其系数连续，且 a^{ij}, $b^i \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$, $c \leq 0$. 再设 $f \in L^p(\Omega)$. 若 $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 满足 $Lu = f$, 则

$$\|u\|_{2,p,\Omega} \leq C\big(\|u\|_{p,\Omega} + \|f\|_{p,\Omega}\big),$$

这里 C 是只依赖于n, p, Ω 及系数矩阵 $A = (a^{ij})$ 的常数.

定理 A.9 及 A.10 中的解叫做强解.

六、流形上的椭圆方程

设 (M, g) 是紧 Riemann 流形（无边或有充分光滑边界）. 本小节我们只限于讨论方程

$$\begin{cases} -\Delta u + au = f & \text{in } M, \\ u = 0 & \text{on } \partial M. \end{cases} \tag{A.4}$$

其中 Δ 是 Beltrami-Laplace 算子，a 是 M 上一足够光滑的实函数.

在以点 $P \in M$ 为中心的一个局部坐标卡 (x, U) 下，

$$\Delta u = (1/\sqrt{|g|})\partial_i(g^{ij}\sqrt{|g|}\partial_j u),$$

展开写就是

$$\Delta u = \partial_i(g^{ij}\partial_j u) + g^{kj}\partial_j u\Gamma^j_{i,k},$$

其中 g_{ij} 是坐标卡 (x,U) 下 (M,g) 的度量矩阵，$|g| = \det(g_{ij})$, $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, 而 $\Gamma^k_{i,j}$ 是 Cristoffel 记号. 由此看出, 算子 $L = \Delta - a$ 在每个局部坐标卡 (x,U) 下都是严格而且一致椭圆的.

1. **弱解与极大值原理.**

用 $H(M)$ 表示 $H^1(M)$ 如果 $\partial M = \emptyset$, $H^1_0(M)$ 如果 $\partial M \neq \emptyset$. 我们说 $u \in H(M)$ 是方程 A.4 的一个弱解，如果对所有 $v \in H(M)$ 成立

$$\int_M \big(\langle\nabla u, \nabla v\rangle + auv\big)\,\mathrm{d}V = \int_M f\,v\,\mathrm{d}V.$$

设 $u \in C^2(M)\cap C(\overline{M})$, 则根据 Green 公式，$u$ 是 A.4 的弱解当且仅当 u 是其古典解.

如果 $(-\Delta + a)$ 是强制的，那么问题 A.4 的弱解存在且唯一，其证明完全与欧氏空间上有界区域的情形类似.

定理 A.11 (弱极大值原理) 设 $(-\Delta + a)$ 是强制的，若 $u \in H(M)$ 满足 $-\Delta u + a\,u \geq 0$, 则 $u \geq 0$. $u \equiv 0$ 当且仅当 $-\Delta u + a\,u \equiv 0$.

证明 首先 $-\Delta u + a\,u \geq 0$ 意味着，对任意 $0 \leq v \in H(M)$,

$$\int_M \big(\langle\nabla u, \nabla v\rangle + auv\big) \geq 0.$$

取 $v = u^- = \max\{0, -u\}$，得

$$\int_M \big(|\nabla u^-|^2 + a|u^-|^2\big) \leq 0$$

由 $(-\Delta + a)$ 的强制性推得 $u^- \equiv 0$，即 $u \geq 0$. 根据存在唯一性定理可推知，$u \equiv 0 \Longleftrightarrow -\Delta u + au \equiv 0$. □

定理 A.12 (强极大值原理) 设 $-\Delta + a$ 是强制的，a 为有界可测函数. 设 $u \in H(M)\cap C(\overline{M})$ 满足 $(-\Delta + a)u \geq 0$，则 u 不能在 M 的内部达到非正最小值，除非它恒等于零.

证明 由弱极大值原理知，$u \geq 0$. 又 a 有界，因而存在实数 $c > 0$，使得

$$-\Delta u + cu \geq 0.$$

在 $\overline{M}$ 的每一个坐标卡 (x, U) 上应用定理 A.8 便得结论. □

2. SCHAUDER 估计与 L^p 估计.

把欧氏空间有界区域上关于 Schauder估计定理 A.3 及 L^p 估计定理 A.9 的结果搬到 (有限个) 坐标卡 (x, U) 上，便获得紧致 (有边或无边) 流形上相应的结论 (见 Wang [205]). 为完整起见，叙述如下

定理 A.13 设 $f,\ a \in C^\alpha(\overline{M}), 0 < \alpha < 1$. 又设 $u \in C^{2,\alpha}(\overline{M})$ 是方程 (A.4) 的解，则存在常数 $C = C(n, \alpha, g, M)$，使得

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{M})} \leq C\left(\|u\|_{C(\overline{M})} + \|f\|_{C^\alpha(\overline{M})}\right).$$

定理 A.14 设 a 是 $\overline{M}$ 上的连续函数，又 $f \in L^p(M)$，$p > 1$. 设 $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap H(M)$，是问题 (A.4) 的解，则

$$\|u\|_{2,p,M} \leq C\left(\|u\|_{p,M} + \|f\|_{p,M}\right),$$

其中 C 是不依赖于 f 及 u 的常数，C 只与 M, n, p 及 Riemann 度量 g 有关.

七、弱解的正则性

1. 经典结论. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域，其边界 $\partial\Omega$ 属于 C^k $(k \geq 2)$ 类. 又设算子

$$Lu = \partial_i(a^{ij}\partial_j u + b^i u) + c^i \partial_i u + du$$

是严格椭圆的，且系数 a^{ij}, $b^i \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$, c^i, $d \in L^\infty(\Omega)$. 在这样的前提下，我们有

定理 A.15 设 $u \in W^{1,p}(\Omega)$ 是方程 $Lu = f$ 的解，$f \in L^p$, $p \geq 2$. 则对任意子区域 $\Omega' \subset\subset \Omega$，有 $u \in W^{2,p}(\Omega')$. 此外，若 Ω 的部分边界 $T \subset \partial\Omega$ 还是 C^2 类的，且 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$，那么只要 $\partial\Omega' \subset \Omega \cup \mathring{T}$，就有 $u \in W^{2,p}(\Omega')$. 若 L 的各系数，f 及所涉边界 T 的光滑性抬高 k 阶，则 $u \in W^{2+k,p}(\Omega')$.

显然，在上述定理中，若 $T = \partial\Omega$，则 $\Omega' = \Omega$. 很容易将以上定理的结论推广到紧致光滑 Riemann 流形上.

2. Brezis-Kato **正则化**.

用变分法讨论二阶非线性椭圆方程时，得到的解属于 $H_0^1(\Omega)$. 为了获得解的正则性结论，通常采用所谓 靴带法 (bootstrapping)，即用下列程序

$$L^p \text{ 估计 } \longrightarrow \text{Sobolev 嵌入} \longrightarrow L^p \text{ 估计}$$

反复迭代，直到方程的解 $u \in C^\alpha(\bar{\Omega})$，再由 Schauder 估计进行迭代，逐步抬高非线性椭圆方程解的光滑性，直到边界、系数等许可的程度.

当正则化问题涉及临界非线性时，这一经典方法不再适用. 以 Brezis-Nirenberg 模型问题为例，设函数 $u \in H_0^1(\Omega)$ 是如下方程的非负解：

$$-\Delta u = |u|^{N-2}u + \lambda u,$$

其中 $N = 2n/(n-2)$，$n = \dim(\Omega)$. 为了获得正则性结论，我们可将 u 看作是下列更一般的一类线性方程的解：

$$-\Delta u = hu, \tag{A.5}$$

其中 $h \in L^{n/2}$ (在 Brezis-Nirenberg 模型情形，$h = \lambda + |u|^{N-2}$). 这时靴带法不能抬高解 u 的可积性. 然而我们有

引理 A.16 (Brezis-Kato [50]) 设 Ω 是 $n \geq 3$ 维有界区域，函数 $h \in L^{n/2}(\Omega)$. 若 $u \in H_0^1(\Omega)$ 是方程 (A.5) 的解，那么对任意实数 $q \geq 1$ 有 $u \in L^q(\Omega)$.

证明 这个证明本质上属于 Struwe [196]. 给定实数 $\lambda > 0$，令

$$u_\lambda = \begin{cases} u, & \text{若 } |u| \leq \lambda, \\ \lambda, & \text{若 } |u| > \lambda. \end{cases}$$

对于 $s \geq 0$，我们有 $u_\lambda^{2s} u \in H_0^1(\Omega)$，用 $\varphi = u_\lambda^{2s} u$ 作试验函数去乘方程 (A.5) 两边，积分、分部积分得

$$\int_\Omega u_\lambda^{2s} |\nabla u|^2 + 2s \int_{\{|u| \leq \lambda\}} u^{2s} |\nabla u|^2 = \int_\Omega h u_\lambda^{2s} |u|^2. \tag{A.6}$$

容易验证，

$$\frac{2}{s+2} \int_\Omega |\nabla (u_\lambda^s u)|^2 \leq \text{(A.6) 的左端},$$

于是由 Sobolev 不等式得

$$\tfrac{2\Lambda}{s+2}\|u_\lambda^s u\|_N^2 \leq \text{(A.6) 的左端}, \tag{A.7}$$

其中 $N=\frac{2n}{n-2}$，Λ 是只与维数 n 有关的常数．而 (A.6) 的右端

$$\int_\Omega h u_\lambda^{2s}|u|^2 \leq K\int_{\{|h|\leq K\}}|u_\lambda^s u|^2+\int_{\{|h|>K\}}|h||u_\lambda^s u|^2 \tag{A.8}$$

其中 K 是某个充分大的正数．对上式右端第二个积分进行估计，由 Hölder 不等式得

$$\int_{\{|h|>K\}}|h||u_\lambda^s u|^2 \leq \left(\int_{\{|h|>K\}}|h|^{n/2}\right)^{\frac{2}{n}}\left(\int_\Omega |u_\lambda^s u|^N\right)^{\frac{n-2}{n}} \tag{A.9}$$

由可积性，上式右端第一个括号内的积分随 $K\to\infty$ 而趋于零，故由 (A.8) 及 (A.9) 得

$$\int_\Omega h u_\lambda^{2s}|u|^2 \leq K\|u_\lambda^s u\|_2^2+\varepsilon(K)\|u_\lambda^s u\|_N^2, \tag{A.10}$$

其中 $\varepsilon(K)\to 0\ (K\to\infty)$．取一个充分大的 K，使得 $\varepsilon(K)\leq\frac{\Lambda}{s+2}$，根据 (A.6)，(A.7) 及 (A.10) 得

$$\tfrac{\Lambda}{s+2}\|u_\lambda^s u\|_N^2 \leq K\|u_\lambda^s u\|_2^2,$$

(这里高明之处在于是对 $u_\lambda^s u$ 而不是对 u_λ^{s+1} 作估计) 令 $\lambda\to\infty$，我们有

$$\|u\|_{(1+s)N} \leq K_s\|u\|_{2(1+s)}, \tag{A.11}$$

现在，我们可以从 $s=0$ 出发，根据 (A.11) 逐次迭代，直到对任意指定的 $q\geq 2$，推出 $u\in L^q(\Omega)$． □

附录B RADON 测度

抽象测度，特别是 Radon 测度被广泛应用于泛函分析、偏微分方程、微分几何、调和分析、概率论等数学领域，其大多理论基本与 Lebesgue 测度论平行，这里仅限于基本概念及基本性质的罗列，详细论述可见 Halmos [109]，严加安 [251]，简明的可见苏维宜 [240] 等参考文献.

一、抽象测度与积分

1. 测度的概念. 抽象测度是定义在所谓可测集上的、具有一定性质的集合函数. 而可测集则属于某个基本集的子集类，使得它对集合的某些运算是封闭的.

设 $\mathscr{R}_\sigma$ 是点集 X 的子集所成的集族，如果 $\mathscr{R}$ 满足:

1° $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathscr{R}_\sigma \implies \bigcup_1^\infty A_n \in \mathscr{R}_\sigma$;

2° $A, B \in \mathscr{R}_\sigma \implies A - B \in \mathscr{R}_\sigma$,

则称 $\mathscr{R}_\sigma$ 为基本集 X 上的 σ 环. 若 $\mathscr{R}_\sigma$ 还满足 $X \in \mathscr{R}$，则称 $\mathscr{R}$ 为 σ 代数.

设 $\mathscr{E}$ 是由基本集 X 的子集构成的集族，记 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 为包含 $\mathscr{E}$ 的最小 σ 环，称作由 $\mathscr{E}$ 生成的 σ 环.

现在，我们可以给出如下

定义 B.1 设 $\mathscr{R}_\sigma$ 为基本集 X 上的 σ 环，且有 $X = \bigcup_{E\in\mathscr{R}_\sigma} E$，则称 $(X, \mathscr{R}_\sigma)$ 为一个可测空间，$E \in \mathscr{R}_\sigma$ 称为可测集.

定义在基本集 X 上的实函数 f 称为可测函数，如果对于任意实数 a 集合 $f^{-1}(a, \infty)$ 是可测集.

由以上定义看出，X 上的一个常函数可测的充分必要条件是 $X \in \mathscr{R}_\sigma$. 而

要使得拓扑空间 (X,τ) 上的任意一个连续函数可测，则 σ 环 $\mathscr{R}_\sigma$ 中必定包含 τ，这是稍后将要介绍的 Borel 可测的概念.

定义 B.2 设 $(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 为可测空间，μ 是定义在 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的广义实值函数，μ 或者取值于 $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$，或者取值于 $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$. 若 μ 满足

1) $\mu(\emptyset)=0$;

2) μ 是 σ 可加的，即对于 $\mathscr{R}_\sigma$ 中两两互不相交的集合列 E_n 有

$$\mu(\sum_1^\infty E_n)=\sum_1^\infty \mu(E_n),$$ [1]

则称 μ 为 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的广义测度或符号测度.

若 μ 只取非负值，则称 μ 为正测度或测度，而称 $(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$ 为测度空间. $E\in\mathscr{R}_\sigma$ 称作 μ 可测集，$\mu(E)$ 称为 E 的测度. 若 $\mathscr{R}_\sigma$ 包含任何零测集的子集，则称 $(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$ 为完全测度空间.

对于测度空间 $(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$，若 $\mu(X)<\infty$，就说 μ 为有限测度. 若有集合序列 $E_n\in\mathscr{R}_\sigma$ 满足 $X=\bigcup_1^\infty E_n$ 且每个 $\mu(E_n)<\infty$，则说 μ 为 σ 有限.

对于可测空间 $(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 上的任意一个符号测度 ν，根据所谓 Jordan-Hahn 分解定理，都可分解为两个正测度的差. 事实上，对任意可测集 E，定义

$$\nu^+(E)=\sup\{\nu(A):\ E\supset A\in\mathscr{R}_\sigma\},$$
$$\nu^-(E)=\sup\{-\nu(A):\ E\supset A\in\mathscr{R}_\sigma\},$$

则 μ^+ 及 μ^- 都为正测度，且$\mu=\mu^+-\mu^-$，记 $|\mu|=\mu^++\mu^-$，称作 μ 的变差测度，$\|\mu\|_{var}\triangleq|\mu|(X)$ 称作 μ 的全变差.

有了测度，我们可以有 μ 几乎处处的概念，记为 μ-p.p. 或 μ-a.e..

从上述两个定义看出，一个集或一个函数是否可测，纯粹是集合论的概念，而与测度完全无关. 这正象拓扑学中开集与连续的概念一样，一个集合是否为开集或一个函数是否连续，只依赖于给定的开集类构成的拓扑，而与度量无关. 尽管如此，在一个测度空间 $(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$ 上，我们仍然方便地使用 μ-可测这一术语.

测度空间 $(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$ 上的可测函数具有如下性质 (见严加安 [251]):

1) μ 可测集 E 上的特征函数及 E 上的阶梯函数都是 μ 可测的.

[1] 当左端取有限值时，约定右端绝对收敛.

2) μ 可测函数关于线性运算、四则运算（分母不为零）是封闭的；可测函数的正部、负部和绝对值都是可测函数.

3) μ 可测函数列的上下确界，上下极限（从而极限）都是 μ 可测函数.

4) 一切 μ 可测函数都是某个阶梯函数列的极限，特别地，一切非负可测函数都是某个非负递增阶梯函数列的极限.

5) 如果 μ 是有限测度，则在测度空间 $(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$ 上成立 Egrov 定理，即，μ-p.p. 收敛的函数列在 μ 测度为任意小的可测集的余集上一致收敛；如果 μ 是 σ 有限的 Radon 测度或更一般的正则测度（见下一目），则对 μ 可测函数成立 Lusin 定理.

2. 抽象积分.

我们可以仿照 Lebesgue 积分给出 μ 测度积分. 设 $(X,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$ 为测度空间，f 为 μ 实可测函数，f 在 X 上关于测度 μ 的积分记作 $\mu(f)$ 或

$$\mu(f)=\int_X fd\mu,$$

其定义按如下步骤给出：

1° *f* 为阶梯函数　设 f 为非负阶梯函数，采用求和约定，写

$$f(x)=c_i\chi_{\omega^i},$$

其中 ω^i $(1\le i\le n)$ 为互斥的 μ 可测集，c_i 为实数，χ_{ω^i} 为 ω^i 的特征函数，则定义

$$\int_X fd\mu=c_i\mu(\omega^i).$$

2° *f* 为非负 μ 可测函数　记 Φ_f 为 X 上满足 $0\le\varphi\le f$ 的阶梯函数所成的集合，则定义

$$\int_X fd\mu=\sup_{\varphi\in\Phi_f}\int_X\varphi d\mu.$$

若上式为有限值，则称 f 在 X 上 μ 可积.

3° *f* 为一般 μ 可测函数　写 $f=f^+-f^-$，并设 f^+ 及 f^- 至少有一个可积，则定义

$$\int_X fd\mu=\int_X f^+d\mu-\int_X f^-d\mu,$$

当上式右端两个积分都有限时，称 f 可积. 全体可积函数构成的集合记为 $L(X,\mu)$.

Lebesgue 积分的许多性质及定理，如单调收敛定理，控制收敛定理，Fatou 定理等，都可平行地推广到抽象积分.

3. Radon-Nikodym 定理.

为了介绍著名的 Radon-Nikodym 定理，我们需要绝对连续的概念.

定义 B.3 *设 ν 为 $(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 上的广义测度，μ 为 $(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 上的正测度，我们称 ν 关于 μ 绝对连续，记为 $\nu\ll\mu$，如果*

$$(\ E\in\mathscr{R}_\sigma,\ \mu(E)=0\ )\Longrightarrow(\ \nu(E)=0\ ).$$

给定可测空间 $(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 上一个正测度 μ，那么对于任意 $f\in L(X,\mu)$，由

$$\nu(E)=\int_E f d\mu,\quad \forall\, E\in\mathscr{R}_\sigma \tag{B.1}$$

定义的广义测度 ν 关于 μ 绝对连续[①]. 称 ν 为 f 的不定积分，记作

$$\mathrm{d}\nu=f\,\mathrm{d}\mu. \tag{B.2}$$

反过来，若广义测度 ν 关于正测度 μ 绝对连续，则下面的 Radon-Nikodym 定理断言，ν 是某个广义 μ 可积函数的不定积分.

定理 B.1 (Radon-Nikodym 定理) *设 ν 为 $(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 上的广义 σ 有限测度，μ 为 $(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 上的 σ 有限测度. 如果 $\nu\ll\mu$，则存在一个广义 μ 可积函数 f，使得 $\mathrm{d}\nu=f\,\mathrm{d}\mu$.*

我们将定理 B.1 中的 f 称为 ν 关于 μ 的 Radon-Nikodym 导数，记为 $f=\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu$. 显然，当三个有限正测度 λ，μ 及 ν 满足 $\nu\ll\lambda\ll\mu$ 时，Radon-Nikodym 导数成立链式法则

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}=\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu},\quad \mu\text{-a.e.}.$$

在 Radon-Nikodym 定理中，如果去掉 $\nu\ll\mu$ 的条件，情况会怎样呢？为此我们给出如下

---

① 这一性质称为可积函数的绝对连续性

定义 B.4 设 μ 为 $(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 上的广义测度，称 $E\in\mathscr{R}_\sigma$ 为 μ-零集，如果对于所有满足 $F\subset E$ 且 $F\in\mathscr{R}_\sigma$ 的集 F 都有 $\mu(F)=0$.

$(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 上的两个广义测度 μ 与 ν 称为互为奇异的，记为 $\mu\perp\nu$，若存在 $\mathscr{R}_\sigma$ 中 μ-零集 E 与 ν-零集 F 使得

$$E\cup F=X,\quad E\cap F=\emptyset.$$

有了两个广义测度互相奇异的概念，Radon-Nikodym 定理可推广为下列

定理 B.2 设 ν 为 $(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 上的广义 σ 有限测度，μ 为 $(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 上的 σ 有限测度，则在 $(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 上存在唯一的一对 σ 有限广义测度 λ 与 ρ，使得

$$\nu=\lambda+\rho,$$

且

$$\lambda\perp\mu,\qquad \rho\ll\mu.$$

进而存在一个广义 μ 可积函数 $f:X\to\mathbb{R}$，使得 $\mathrm{d}\rho=f\,\mathrm{d}\mu$.

上述定理中 $\nu=\lambda+\rho$ 叫做 ν 关于 μ 的 Lebesgue 分解. 定理的证明依赖于下列引理，它自身也是有用的.

引理 B.3 设 μ 与 ν 为 $(X,\mathscr{R}_\sigma)$ 上的有限测度，则或者 $\mu\perp\nu$，或者存在 $E\in\mathscr{R}_\sigma$，$\mu(E)>0$，及正数 $c>0$，使得

$$(\nu-c\mu)(E)=\nu(E)-c\mu(E)>0,$$

亦即 $\nu\geq c\mu$ 在 E 上成立.

二、Radon 测度

设 (X,τ) 是拓扑空间，τ 为其拓扑，即 X 的开子集的全体所成的集族. 本目始终假设

$$X \text{ 为局部紧 Hausdorff 空间} \tag{B.3}$$

并记由 τ 所生成的 σ 代数为

$$\mathscr{B}(X)=\mathscr{A}_\sigma(\tau) \tag{B.4}$$

称为 X 的 *Borel* 集类，$\mathscr{B}$ 的元称为 Borel 集. Borel 集类 $\mathscr{B}$ 也可等价地定义为由 X 中的紧集生成的 σ 代数.

1. **正则性与 Radon 测度.**

设 $\mathscr{A}$ 是包含 Borel 集类 $\mathscr{B}$ 的 σ 代数，μ 是 $\mathscr{A}$ 上的一个测度. 我们称 μ 是外正则的，若对每个可测集 $A \in \mathscr{A}$ 都有

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) : O \supset A \text{ 且是开集}\};$$

我们称 μ 是内正则的 (相应地强内正则的)，若对每个开集 (相应地可测集) O 都有

$$\mu(O) = \sup\{\mu(K) : K \subset O \text{ 且是紧集}\}.$$

既内正则又外正则的测度，称为正则测度.

定义 B.5 设 μ 为 X 上的正则测度, 如果 μ 在每个紧子集上是有限的, 则称 μ 为 X 上的 Radon 测度.

当然，我们同样可以引进符号正则测度与符号 Radon 测度的概念.

可以证明，当 Radon 测度 μ 为 σ 有限时，则 μ 是强内正则的. 故欧氏空间 (或其区域) 上的 Radon 测度都是强内正则的.

下列定理部分地建立了 Radon 测度与基本集 X 的拓扑之间的关系.

定理 B.4 设 $\mathscr{A}$ 为包含 Borel 集类 $\mathscr{B}$ 的 σ 代数, μ 为 $\mathscr{A}$ 上 σ 有限的 Radon 测度, E 为 $\mathscr{A}$ 可测集, 则存在 F_σ 型集 A 及 G_δ 型集 B, 使得

$$A \subset E \subset B \quad \text{且} \quad \mu(B - A) = 0.$$

这里 F_σ 型集是可列多个闭集的并, G_δ 型集是可列多个开集的交.

对于正则测度来说，成立如下 Lusin 定理.

定理 B.5 (Lusin 定理) 设 $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}(X)$ 是 σ 代数, μ 是 $\mathscr{A}$ 上的正则测度. 设 f 为 X 上的 $\mathscr{A}$ 可测函数, $A \in \mathscr{A}$ 是 μ 测度有限的可测集, 则 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset A$ 及函数 $g \in C_c(X)$, 使得

$$g|_K = f|_K, \quad \sup_{x\in X} |g(x)| \le \sup_{x\in A} |f(x)|, \quad \mu(A - K) < \varepsilon.$$

2. Radon 测度的例子.

(1) 由可积函数定义的测度　设 Ω 是 $\mathbb{R}^d$ 中的区域，$\mathscr{B}$ 是 Ω 的 Borel 集类. 对于任意非负函数 $f \in L^1(\Omega)$，定义测度 μ_f 为

$$\mu_f(E) \triangleq \int_E f dx, \quad E \in \mathscr{B}, \tag{B.5}$$

则 μ_f 为 $(\Omega, \mathscr{B})$ 上的一个有限 Borel 测度，并且是 Radon 测度. 对于一般的可积函数 $f \in L^1(\Omega)$，(B.5) 则定义一个有限 Radon 符号测度，且

$$\|\mu_f\|_{var} = \|f\|_{L^1}. \tag{B.6}$$

由 (B.5) 定义一个从 $L^1(\Omega)$ 到 $\mathcal{M}(\Omega)$ 的保范映射：$j(f) = \mu_f$，换言之，我们有连续嵌入

$$L^1(\Omega) \to \mathcal{M}(\Omega).$$

有鉴于此，常常将由 f 诱导的测度 μ_f 写作 f.

(2) Dirac 测度 δ_{x_0}　设 Ω 是 $\mathbb{R}^d$ 中的区域，$x_0 \in \Omega$. 记 $\mathscr{B}$ 是 Ω 的 Borel 集类. 对于任意 $E \in \mathscr{B}$，定义

$$\delta_{x_0}(E) \triangleq \begin{cases} 0, & 若\ x_0 \notin E, \\ 1, & 若\ x_0 \in E. \end{cases}$$

则 δ_{x_0} 为 $(\Omega, \mathscr{B})$ 上的 Radon 测度. 进一步还可验证，对于点列 $x_n \in \mathbb{R}^d$ 及正项收敛级数 $\sum v_n$，测度

$$\mu = \sum v_n \delta_{x_n}$$

亦为 Rondon 测度.

三、Riesz 表示定理

1. $\mathcal{B}(X)$ 与 $\mathcal{M}(X)$.　仍设 X 是局部紧 Hausdorff 空间，我们把定义在 Borel 集类 $\mathscr{B}$ 上的测度称为 X 上的 *Borel* 测度. 用 $\mathcal{B}(X)$ 表示 X 上有限 Borel 符号测度构成的集合，并赋以全变差范数 $\|\mu\|_{var} = |\mu|(X)$，则 $\mathcal{B}(X)$ 是 Banach 空间.

X 上的符号测度 μ 称为正则的，如果其变差测度 $|\mu|$ 是正则的. 用 $\mathcal{M}(X)$ 表示 $\mathscr{B}$ 上有限 Radon 符号测度的全体，范数为全变差，即 $\|\mu\|_{var} = |\mu|(X)$.

在此情形 (见 严加安 [251] 习题 3.3.8)

$$\|\mu\|_{var} = \sup_{\varphi \text{ 连续}, |\varphi| \le 1} \int_X \varphi \mathrm{d}\mu. \tag{B.7}$$

这样规定范数后，$\mathcal{M}(X)$ 是 Banach 空间．而且是 $\mathcal{B}(X)$ 的闭子空间，

2. Riesz 表示定理.

设 X 是一局部紧 Hausdorff 空间(本目均作此假设)，$C_c(X)$ 表示 X 上具有紧支集的连续函数构成的集合，$C_0(X)$ 表示 X 上在“无穷远处”为 0 的连续函数全体，即 $C_0(X) = \overline{C_c(X)}$.

如果 μ 是 X 上的 Radon 测度，那么显然 μ 在 $C_c(X)$ 上诱导一个正线性泛函

$$L_\mu(f) = \int_X f d\mu, \quad f \in C_c(X).$$

这一事实反过来也是成立的.

用 $f \prec U$ 表示 $0 \le f \le 1$ 且 sppt $f \subseteq U$. 我们有如下 Riesz 表示定理

定理 B.6 设 L 是 $C_c(X)$ 上的正线性泛函，即对 $0 \le f \in C_c(X)$ 有 $L(f) \ge 0$. 那么在 X 上存在唯一的 Radon 测度 μ，使得

$$L(\varphi) = \int_X \varphi d\mu, \quad \varphi \in C_c(X).$$

并且满足: (1) 若 U 是 X 的开子集，则

$$\mu(U) = \sup\{L(f) : f \in C_c(X) \text{ 且 } f \prec U\};$$

(2) 若 K 是 X 的紧子集，记 χ_K 为 K 的特征函数，则

$$\mu(K) = \inf\{L(f) : f \in C_c(X) \text{ 且 } f \ge \chi_K\}.$$

对于 $\mu \in \mathcal{M}_r(X)$，令

$$L_\mu f = \int_X f d\mu, \quad f \in C_0(X). \tag{B.8}$$

定理 B.7 设 X 是局部紧 Hausdorff 空间，则由 (B.8) 定义的映射 $\mu \mapsto L_\mu$ 为从 $\mathcal{M}(X)$ 到 $C_0(X)^*$ 上的保范同构.

3. **对偶空间.**

1) 设 X 是局部紧的可分拓扑空间，则 $C(X)$ 的对偶空间 $C(X)^*$ 与 $\mathcal{B}(X)$ 等距同构. 同构对应为：$L_\mu(f)=\int_X f\mathrm{d}\mu$

2) 设 $(\Omega,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$ 为一测度空间，则 $L^\infty(\Omega,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$ 的对偶空间与 $\mathscr{R}_\sigma$ 上全变差有穷、关于测度 μ 绝对连续的有限可加集函数构成的 Banach 空间 $ba(\Omega,\mathscr{R}_\sigma,\mu)$ 等距同构. $ba(\Omega,\mu))$ 的范数为全变差范数

$$\|\nu\|_{var}=\sup\{\sum|\nu(A_i)|:\{A_i\}\text{ 为 }\Omega\text{ 的任一有限可测划分}\}.$$

同构对应为：$L_\nu(f)=\int_X f\mathrm{d}\nu$. [1]

3) $C_0(X)^*\cong\mathcal{M}(X)$，同构对应为 (B.8). 特别，$X$ 紧致时，$C(X)^*\cong\mathcal{M}(X)$（见苏维宜 [240] 第三章习题 37）.

4) 用 $C(\mathbb{R}^n\cup\infty)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 的单点紧化空间 $\mathbb{R}^n\cup\infty$ 上的连续函数构成的 Banach 空间，$C(\mathbb{R}^n\cup\infty)$ 中的元素就是在无穷远具有穷极限值的连续函数，按照 3)，其对偶空间为 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n\cup\infty)$.

四、测度列的收敛

设 μ 为度量空间 (X,ρ) 上的 Radon 测度，若对某个 $x_0\in X$ 有 $\mu(\{x_0\})\neq 0$，则称 x_0 为 μ-原子. 显然 μ-原子全体为一个至多可数集；若 $\mu(\{x_0\})=0$，则称 x_0 为 μ-连续点. 若对某个 $E\in\mathscr{B}(X)$，其边界的测度 $\mu(\partial E)=0$，则称 E 为 μ-连续集.

记 $C_b(X)$ 为度量空间 (X,ρ) 上有界连续函数的全体，我们有

定义 B.6 设 X 是局部紧 Hausdorff 空间，$\{\mu_n\}$ 为 $\mathscr{B}(X)$ 上的 Radon 测度，如果

$$\lim_{n\to\infty}\int_X fd\mu_n=\int_X fd\mu,\quad\forall f\in C_c(X),$$

则称 $\{\mu_n\}$ 淡收敛于 (vaguely convergent to) μ，记为 $\mu_n\xrightarrow{v}\mu$.

定义 B.7 设 (X,ρ) 是一距离空间，$\mu,\mu_1,\mu_2,\cdots$ 为 Borel 集类 $\mathscr{B}(X)$ 上的有限测度. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\int_X fd\mu_n=\int_X fd\mu,\quad\forall f\in C_b(X),$$

则称 $\{\mu_n\}$ 弱收敛于 μ，记为 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu$.

[1] 结论 2) 的证明可见严加安[251] 或 Yosida[214].

淡收敛满足一定条件，则可推出弱收敛，我们有

命题 B.8 设 X 为一具有可数基局部紧 Hausdorff 空间，μ，μ_1，μ_2，$\cdots$ 为 $\mathscr{B}(X)$ 上的有限正则测度（从而为 Radon 测度），则

$$\left(\mu_n \xrightarrow{v} \mu \text{ 且 } \mu_n(X) \to \mu(X)\right) \Longrightarrow \left(\mu_n \xrightarrow{w} \mu\right).$$

命题 B.9 设 X 是局部紧 Hausdorff 空间，$\{\mu_n\}$ 为 $\mathscr{B}(X)$ 上的 Radon 测度，如果对一切 $f \in C_c(X)$，极限

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f d\mu_n \triangleq l(f)$$

存在且有穷，则在 $\mathscr{B}(X)$ 上存在唯一 Radon 测度 μ，使得 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$.

下面是关于 d 维欧氏空间 $\mathbb{R}^d$ 上测度列的的 Helly 定理.

命题 B.10 设 $\{\mu_n\}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上一列有限 Borel 测度，$\sup\limits_n \mu_n(\mathbb{R}^d) < \infty$，则存在 $\{\mu_n\}$ 的一子列 $\{\mu_{n_k}\}$ 及某个 Borel 测度 μ，使得 $\mu_{n_k} \xrightarrow{v} \mu$.

五、Hausdorff 测度与 Sobolev 容度

这里我们只罗列一些与本书有关的内容. 关于 Hausdorff 测度参见 Federer 的书 [98]，关于 Sobolev 容度见 Evans-Gariepy [93] 或 Maz'ya [144].

1. 欧氏空间上的 Hausdorff 测度. Hausdorff 测度及维数的概念最初由 Hausdorff 在 1918 年的一篇文章中引入，广泛地出现在许多硬分析及几何分支，通过分析例外集，被应用于调和分析，位势理论，微分几何等领域.

设 s 是一实数. 给定 $\varepsilon > 0$，在 $\mathbb{R}^n$ 的可测集族 $\mathscr{L}$ 上定义集合函数

$$\mathscr{H}_\varepsilon^s(E) = \inf\left\{\sum\nolimits_{i=1}^m (\operatorname{diam} B_i)^s : E \subset \bigcup\nolimits_{i=1}^\infty B_i, \operatorname{diam} B_i < \varepsilon\right\}.$$

其中下确界取 E 的所有可能覆盖，每个覆盖由有限或可列多个直径小于 ε 的开球 B_i 构成. 可测集 E 的 s 维 Hausdorff 测度定义为

$$\mathscr{H}^s(E) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathscr{H}_\varepsilon^s(E).$$

可以验证，这样定义的集合函数 $\mathscr{H}^s$ 具有测度的所有性质，因而是测度.

当 $s=n$ 时，$\mathscr{H}^s$ 与 Lebesgue 测度相同 (相差一常数倍). 当 E 是光滑曲线段 (光滑曲面片) 时，$\mathscr{H}^1$ (相应地 $\mathscr{H}^2$) 与曲线长度 (曲面面积) 等同……

如果用以覆盖 E 的集合不是球而是其他集类，一般来说便给出不同的 Hausdorff 测度.

给定一个集合 E，存在唯一的一个实常数 s_0，当 $s>s_0$ 时 $\mathscr{H}^s(E)=0$，当 $s<s_0$ 时 $\mathscr{H}^s(E)=\infty$，这个数 s_0 就定义为 E 的 Hausdorff 维数. 即

$$\dim_H E=\sup\{s:\mathscr{H}^s(E)>0\}.$$

据此定义，直线及光滑曲线的 Hausdorff 维数为 1，平面及光滑曲面的 Hausdorff 维数为 2，Cantor 三分集的 Hausdorff 维数为 $\log_3 2$.

2. Sobolev **容度**. 设 $p>1$ 是一实数，集合 $E\in\mathbb{R}^n$. 记

$$S_p(E)=\{u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n):\exists\text{ 开集 }O\supset E\text{ 使得 }u|_O\geq 1\}.$$

集合 $E\in\mathbb{R}^n$ 的 $W^{1,p}$ 容度 Cap_p 为一集合函数，若 $S_p(E)\neq\varnothing$，定义

$$\mathrm{Cap}_p(E)=\inf_{u\in S_p(E)}\left(\|u\|_p^p+\|\nabla u\|_p^p\right),$$

若 $S_p(E)=\emptyset$，则定义 $\mathrm{Cap}_p(E)=\infty$. 集合 E 的 H^1 容度常写为 $\mathrm{Cap}(E)$.

根据定义不难证明下列定理.

定理 B.11 设 $p>1$，则 p 阶 Sobolev 容度 Cap_p 具有下列性质

(a) $\mathrm{Cap}_p(\varnothing)=0$;

(b) Cap_p 单调非降: $A\subset B\Longrightarrow\mathrm{Cap}_p(A)\leq\mathrm{Cap}_p(B)$;

(c) Cap_p 从下连续: $A_k\uparrow A\Longrightarrow\mathrm{Cap}_p(A_k)\uparrow\mathrm{Cap}_p(A)$;

(d) Cap_p 沿紧集族$\mathcal{K}$ 从上连续: 即

$$\mathcal{K}\ni A_k\downarrow A\Longrightarrow\mathrm{Cap}_p(A_k)\downarrow\mathrm{Cap}_p(A);$$

(e) Cap_p 满足 σ 次可加性条件: $\mathrm{Cap}_p(\bigcup A_k)\leq\sum\mathrm{Cap}_p(A_k)$.

由性质 (a), (b), (e) 看出，Cap_p 是外测度；而性质 (b), (c), (d) 则说明 Cap_p 是 Choquet 容度.

下面的命题在一定程度说明了 Lebesgue 测度，Hausdorff 测度与 Sobolev 容度间的关系.

命题 B.12 (α) 若 $E \in \mathbb{R}^n$ 可测，则 $|E| \le \mathrm{Cap}_p(E)$; ($\beta$) 若 E 的 Sobolev 容度为零，即 $\mathrm{Cap}_p(E) = 0$，则对于 $s > n-p$，其 Hausdorff 测度 $\mathscr{H}^s(E) = 0$; (γ) 若对于某个 $p < n$，E 的 Hausdorff 测度 $\mathscr{H}^{n-p}(E) = 0$，则 $\mathrm{Cap}_p(E) = 0$.

利用 Sobolev 容度及 $W^{1,p}$ 拟连续的概念，可以比较"精确"地刻划 Sobolev 空间 $W^{1,p}$ 中函数的性质.

定义 B.8 我们说可测函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是 $W^{1,p}$ 拟连续的，如果对于任给 $\varepsilon > 0$ 存在一个 Cap_p 容度小于 ε 的开集 O，使得 $f : \mathbb{R}^n \setminus O \to \mathbb{R}$ 连续.

对于 $W^{1,p}$ 函数，存在一个几乎处处相等的 $W^{1,p}$-拟连续函数，即

定理 B.13 设 $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$，$p > 1$，则存在一个 $W^{1,p}$-拟连续函数 $\tilde{u}$，使得在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处有 $u = \tilde{u}$.

证明 选取函数列 $u_k \in C^\infty \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$，使得 $\|u_k - u\|_{1,p} < 4^{-k}$. 记

$$E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |u_k(x) - u_{k+1}(x)| > 2^{-k}\},$$

$$F_k = \bigcup\nolimits_{m \ge k} E_k, \qquad\qquad F = \bigcap\nolimits_{k \ge 1} F_k,$$

则 F_k 是开集，且 $F_k \supset F_{k+1} \supset F$. 此外，对于任意 $l \ge 1$，以及 $x \in \mathbb{R}^n - F_l$，当 $k, m > l$ 时

$$|u_k(x) - u_l(x)| \le \sum\nolimits_{j=l}^{k-1} |u_k - u_l| \le \sum\nolimits_{j=l}^{k-1} 2^{-j} < 2^{1-l},$$

由此可知，$\{u_k(x)\}$ 在每个 F_j 之外一致收敛，从而在 $\mathbb{R}^n - F$ 上收敛. 令

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} \lim\limits_k u_k(x) & x \in \mathbb{R}^n - F, \\ 0 & x \in F. \end{cases}$$

则因一致收敛，$\tilde{u}$ 在 $\mathbb{R}^n - F_j$ 上连续.

现往证 $\mathrm{Cap}_{1,p}(F) = \lim \mathrm{Cap}_{1,p}(F_k) = 0$. 令 $v_k = 2^k(u_{k+1} - u_k)$，则

$$\|v_k\|_{1,p} \le 2^{1-k}, \qquad |v_k| > 1 \text{ 在 } E_k \text{ 上},$$

因而 $\mathrm{Cap}_{1,p}(E_k) \le \|v_k\|_{1,p}^p \le 2^{1-k}$. 而

$$\mathrm{Cap}_{1,p}(F_k) \le \sum\nolimits_{m \ge k} \mathrm{Cap}_{1,p}(E_m) \le \sum\nolimits_{m \ge k} 2^{1-m} = 2^{2-k},$$

故 $\mathrm{Cap}_{1,p}(F) \le \lim \mathrm{Cap}_{1,p} F_k = 0$. 从而 $\tilde{u}$ 拟连续，且 $\tilde{u} = u$ p.p. 于 $\mathbb{R}^n$. □

附录C　算子插值及其他

本附录所述内容，在一般调和分析教科书中都有阐述，例如苗长兴 [236]，Brown [59]，也可参见陈亚浙 [224].

一、卷积与正则化

1. 卷积. $\mathbb{R}^n$ 上的函数 u 与 v 的卷积形式地定义为

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

卷积具有如下性质 (参见苗长兴 [236] 或 Adams [13]):

(α) $f*g$ 或 $g*f$ 存在时，$f*g=g*f$；

(β) $f\in C_0,\, g\in C^m$，则卷积 $f*g\in C^m$ 且有

$$D^\alpha(f*g)=f*(D^\alpha g),\quad |\alpha|\le m;$$

(γ)（Young 不等式）$f\in L^p,\, g\in L^q$，$1\le p,\, q\le\infty$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\ge 1$，则

$$\|f*g\|_r\le\|f\|_p\cdot\|g\|_q\,,\quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}\right)$$

特别当 $f\in L^1,\, g\in L^p$ 时，

$$\|f*g\|_p\le\|f\|_1\cdot\|g\|_p\,.$$

2. Friedrichs **正则化算子**.

现在准备给出软化子的定义. 取非负实函数 $J \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使其满足如下两条性质:

$$\text{(I)} \int_{\mathbb{R}^n} J(x)\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{及} \quad \text{(II)}\ \mathrm{sppt}(J) \subset \overline{B}_1,$$

其中 B_1 是中心在原点的单位球. 例如 J 可取作

$$J(x) = 0,\ |x| \ge 1; \quad J(x) = k\exp(1/(|x|^2 - 1)),\ |x| < 1.$$

其中取常数 k 使得 J 的积分等于 1.

设 $\varepsilon > 0$, 定义 $J_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} J(x/\varepsilon)$, 则 J_ε 的支集在半径为 ε 的球内, 且 J_ε 积分也等于 1. 我们称 J_ε 为 Friedrichs 正则化算子或光滑化算子, 也称软化子 (mollifier[①]). 而称卷积 $J_\varepsilon * f$ 为 f 的一个光滑化或正则化. 软化子 J_ε 有如下的性质:

(α) 若 $f \in L^1$, 则 $J_\varepsilon * f \in C^\infty$; 若 $\mathrm{sppt}\, f$ 紧, 则 $J_\varepsilon * f \in C_c^\infty$.

(β) 若 $f \in L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, 则 $J_\varepsilon * f \in L^p(\Omega)$, 而且成立

$$\|J_\varepsilon * f\|_p \le \|f\|_p, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \|J_\varepsilon * f - f\|_p = 0.$$

(γ) 若 $D^\alpha f \in L^p$, $1 \le p < \infty$, 则 $J_\varepsilon * (D^\alpha f) \in L^p$, 而且成立

$$\|D^\alpha(J_\varepsilon * f)\|_p \le \|D^\alpha f\|_p, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \|D^\alpha(J_\varepsilon * u) - D^\alpha u\|_p = 0.$$

这些性质的证明, 见苗长兴 [236] 或 Adams [13].

二、Marcinkiewicz 插值算子

1. **弱 (p,q) 型算子**. 弱 L^p 空间在 Marcinkiewicz 插值理论中是个重要概念. 在第一章, 作为 Lorentz 空间的特款, 我们已引进弱 L^p 空间 (也称 Marcinkiewicz 空间) L_w^p 的概念.

我们知道, Ω 上可测函数 $f \in L_w^p(\Omega)$ ($1 \le p \le \infty$) 的充分必要条件是

$$[f]_p \triangleq \sup_{\lambda > 0} \lambda \big[\ \mathrm{meas}\{|f| > \lambda\}\big]^{1/p} < \infty.$$

[①] Moll 是 Friedrichs 的雅号, 含道德先生之义.

当 $p=\infty$ 时，$L_w^\infty(\Omega)=L^\infty(\Omega)$，且 $[f]_\infty=\|f\|_\infty$.

显然 $L^p(\Omega)\subset L_w^p(\Omega)$. 又因函数 $f(x)=|x|^{-1}$ 属于 $L_w^1(\mathbb{R}^n)$ 而不属于 $L^1(\mathbb{R}^n)$，所以，$L^p(\Omega)$ 是 $L_w^p(\Omega)$ 的真子集.

需注意的是，因不满足 Minkowski 不等式，$[\cdot]_p$ 只是拟范数而不是范数，然而我们有

$$[f+g]_p\le 2[f]_p+2[g]_p.$$

在这个拟范数下，$L_w^p(\Omega)$ 构成一个完备拓扑空间.

设 T 是映 Ω 上可测函数到自身的算子，我们称 T 是次线性的，如果对于任意可测函数 f 与 g 几乎处处成立

$$|T(f+g)(x)|\le|Tf(x)|+|Tg(x)|. \tag{C.1}$$

定义 C.1 我们称次线性算子 $T: L^p(\Omega)\to L_w^q(\Omega)$ 称为弱 (p,q) 型的，如果存在常数 A 使得

$$[Tf]_q\le A\|f\|_p,\quad \forall f\in L^p(\Omega).$$

如果将上述不等式中的拟范数 $[Tf]_q$ 换作范数 $\|Tf\|_q$，就称 T 为强 (p,q) 型的.

根据这个定义，强 (p,q) 型隐含弱 (p,q) 型. 此外易见，T 为弱 (p,q) 型的的充分必要条件是，存在常数 A 使得对于任意 $\lambda>0$ 及任意 $f\in L^p(\Omega)$

$$\operatorname{meas}\{|Tf(x)|>\lambda\}\le\left(\frac{A\|f\|_p}{\lambda}\right)^q.$$

如果 $q=\infty$，则算子 T 是弱 (p,∞) 的充分必要是，存在常数 A 使得

$$\|Tf\|_\infty\le A\|f\|_p.$$

2. Marcinkiewicz **插值定理**.

设次线性算子 T 既是弱 (p,p) 型的又是弱 (q,q) 型的，$1\le p<q\le\infty$. 任给 $f\in L^r$ $(r\in(p,q))$，我们都可用截函数 (truncate) f_λ 及 f^λ 将 f 分解为 $f=f_\lambda+f^\lambda$，其中

$$f_\lambda=\begin{cases}f, & 如果\ |f|\le\lambda,\\ 0, & 如果\ |f|>\lambda,\end{cases}\qquad f^\lambda=\begin{cases}0, & 如果\ |f|<\lambda,\\ f, & 如果\ |f|\ge\lambda,\end{cases} \tag{C.2}$$

因 f_λ 是 L^q 函数，而 f^λ 是 L^p 函数，这样 $[Tf^\lambda]_p$ 及 $[Tf_\lambda]_q$ 有界，下列 Marcinkiewicz 插值定理说，Tf 在 L^r 上是良定的 (well defined)，而且是 $L^r(\mathbb{R}^n)$ 到自身的有界算子.

定理 C.1 (Marcinkiewicz 对角型插值定理) 设 p, q 满足 $1 \le p < q \le \infty$. 若次线性算子 T 既是弱 (p,p) 型的，又是弱 (q,q) 型的，即

$$[Tf]_p \le A_p \|f\|_p, \quad \forall f \in L^p(\Omega), \tag{C.3}$$

$$[Tf]_q \le A_q \|f\|_q, \quad \forall f \in L^q(\Omega), \tag{C.4}$$

则对于任意 $r \in (p, q)$，T 是强 (r,r) 型的.

证明 先考虑 $q < \infty$ 的情形. 设 $f \in L^r(\Omega)$，设 $\lambda > 0$. 如同 (C.2)，将 f 分解为 $f = f_\lambda + f^\lambda$. 因 T 次线性，我们有

$$\text{meas}\{|Tf| \ge 2\lambda\} \le \text{meas}\{|Tf^\lambda| \ge \lambda\} + \text{meas}\{|Tf_\lambda| \ge \lambda\} \tag{C.5}$$

因 f^λ 是 L^p 函数，而 f_λ 是 L^q 函数，由 T 的弱 (p,p) 及弱 (q,q) 条件，

$$\text{meas}\{|Tf^\lambda| > \lambda\} \le \left(\frac{A_p\|f^\lambda\|_p}{\lambda}\right)^p, \tag{C.6}$$

$$\text{meas}\{|Tf_\lambda| > \lambda\} \le \left(\frac{A_q\|f_\lambda\|_q}{\lambda}\right)^q. \tag{C.7}$$

将上两式代入 (C.5) 再乘以 $r\lambda^{r-1}$ 后关于 λ 积分，根据引理 1.30 得

$$\begin{aligned}2^{-r}\|Tf\|_r^r &\le rA_p^p\int_0^\infty \|f^\lambda\|_p^p\lambda^{r-p}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} + rA_q^q\int_0^\infty \|f_\lambda\|_q^q\lambda^{r-p}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}\\ &= rpA_p^p\int_0^\infty\int_0^\infty \text{meas}\{|f^\lambda| > \tau\}\tau^p\lambda^{r-p}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} + \\ &\quad + rqA_q^q\int_0^\infty\int_0^\infty \text{meas}\{|f_\lambda| > \tau\}\tau^q\lambda^{r-q}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}\\ &\equiv (rpA_p^p)I + (rqA_q^q)II,\end{aligned}$$

即

$$2^{-r}\|Tf\|_r^r \le (rpA_p^p)I + (rqA_q^q)II. \tag{C.8}$$

注意积分 II 的上限只到达 λ，且有 $\mathrm{meas}\{|f_\lambda| > \tau\} \leq \mathrm{meas}\{|f| > \tau\}$，然后应用 Fubini 定理

$$II \leq \int_0^\infty \int_0^\lambda \mathrm{meas}\{|f| > \tau\}\tau^q \lambda^{r-q} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}$$
$$= \int_0^\infty \tau^q \,\mathrm{meas}\{|f| > \tau\} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \int_\tau^\infty \lambda^{r-q} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}$$
$$\leq \frac{1}{q-r} \int_0^\infty \tau^r \,\mathrm{meas}\{|f| > \tau\} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}$$

应用引理 1.30 得

$$II \leq \frac{1}{r(q-r)} \|f\|_r^r \tag{C.9}$$

现估计积分 I. 我们注意

$$\mathrm{meas}\{|f^\lambda| > \tau\} = \mathrm{meas}\{|f| > \tau\}, \quad 如果\ \tau > \lambda,$$
$$\mathrm{meas}(|f^\lambda| > \tau\} = \mathrm{meas}\{|f| \geq \lambda\}, \quad 如果\ \tau \leq \lambda.$$

从而

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{meas}\{|f^\lambda| > \tau\}\tau^p \lambda^{r-p} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}$$
$$= \int_0^\infty \int_\lambda^\infty \mathrm{meas}\{|f| > \tau\}\tau^p \lambda^{r-p} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}$$
$$+ \int_0^\infty \int_0^\lambda \mathrm{meas}\{|f| > \lambda\}\tau^p \lambda^{r-p} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}$$

由 Fubini 定理及引理 1.30 得

$$I = \frac{1}{p(r-p)} \|f\|_r^r. \tag{C.10}$$

最后由 (C.8), (C.9), (C.10) 得

$$\|Tf\|_r^r \leq 2^r \left(\frac{rA_p^p}{r-p} + \frac{qA_q^q}{q-r} \right) \|f\|_r^r,$$

如果 $q = \infty$，则因算子 T 是弱 (∞, ∞) 型的，故 $\mathrm{meas}\{|Tf_\lambda| > A_\infty\lambda\} = 0$. 而且

$$\mathrm{meas}\{|Tf| > (1 + A_\infty)\lambda\} \leq \mathrm{meas}\{|Tf^\lambda| > \lambda\}.$$

仿照 (C.8) 及 (C.10) 的推导，可得

$$(1+A_\infty)^{-r}\|Tf\|_r^r \le \frac{rA_p^p}{r-p}\|f\|_r^r,$$

定理证毕. □

三、Hardy-Littlewood 极大函数

1. 概念及性质.　设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数，则 f 的 Hardy-Littlewood 极大函数由下式给出

$$Mf(x) \triangleq \sup_{r>0}\frac{1}{m(B_r)}\int_{x+B_r}|f(y)|\mathrm{d}y,$$

其中 B_r 是心在原点，半径为 r 的球. 这个定义可等价表述为

$$Mf(x) = \sup_{r>0}|f| * \chi_r(x)$$

其中 χ_r 是 B_r 的规范特征函数，即 $\chi_r = (1/m(B_r))\chi_{B_1}$.

Hardy-Littlewood 极大函数 Mf 具有如下初等性质:

(α) 若 f 可测，则 Mf 上半连续;

(β) 极大算子 $M : f \mapsto Mf$ 是次线性的;

(γ) 算子 M 是强 (弱) (∞,∞) 型的，即 $\|Mf\|_\infty \le \|f\|_\infty$.

定理 C.2　Hardy-Littlewood 极大算子 M 是弱 $(1,1)$ 型的，即

$$\|Mf\|_1^* \le \|f\|_1,\quad \forall f\in L^1(\mathbb{R}^n).$$

定理的证明依赖下列引理

引理 C.3 (覆盖引理)　设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有限可测集，它被一族有界球 $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}$ 所覆盖，则存在有限个互不相交的球 $\{B_1,\dots,B_N\}\subset\mathcal{B}$，使得

$$m(E) \le 2\cdot 3^n \textstyle\sum_{j=1}^N m(B_j).$$

证明 找一个紧集 $K \subset E$ 使得 $m(K) > \frac{1}{2}m(E)$. 由有限覆盖定理知，存在有限球族 $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ 覆盖 K. 令 $B_1 \in \mathcal{B}_1$ 是最大的球. 然后令 $\mathcal{B}_2$ 是 $\mathcal{B}_1$ 中所有与 B_1 不相交的球族，令 $B_2 \in \mathcal{B}_2$ 是最大的球. 如此这般，直到 B_{N+1} 成为空集.

对于任意球 $B \in \mathcal{B}_1$，只有两种情形，一是它包含在所选球 $\{B_1, \ldots, B_N\}$ 中，一是在第 j_0 步向 j_0+1 步选择的过程中被淘汰，即 B 与 B_{j_0} 相交且其半径至多与 B_{j_0} 相等，因而 $B \subset 3B_{j_0}$. 这样便有

$$K \subset \cup_{B\in\mathcal{B}_1} B \subset \cup_{j=1}^N 3B_j.$$

两端取测度，根据测度的单调性及次可加性得

$$m(E) \le 2m(K) \le 2\cdot 3^n \textstyle\sum_{j=1}^N m(B_j),$$

如此，完成覆盖引理的证明. □

定理 C.2 的证明 我们需证明，存在常数 $C = C(n)$，使得对于任意 $f \in L^1$ 成立

$$m(|Mf| > \lambda) \le (C/\lambda)\|f\|_1.$$

令 $E_\lambda = \{x : Mf(x) > \lambda\}$，任取测度有限的可测集 $E \subset E_\lambda$，对于每个 $x \in E_\lambda$，依极大函数的定义，存在一个球 B_x 使得

$$\frac{1}{m(B_x)}\int_{B_x} |f(x)|\mathrm{d}x > \lambda. \tag{C.11}$$

应用覆盖引理，引理 C.3，存在有限个球 $B_1, \ldots, B_N \in \{B_x : x \in E\}$，使得

$$m(E) \le \beta_n \textstyle\sum_{j=1}^N m(B_j)$$

结合条件 (C.11) 并注意 $B_1, \ldots, B_N$ 互不相交的特性，便得

$$m(E) \le \frac{\beta_n}{\lambda}\sum_{j=1}^N \int_{B_j} |f(x)|\mathrm{d}x \le \frac{\beta_n}{\lambda}\|f\|_1.$$

由 E 是 E_λ 中任意有限可测集，对上式取上确界，便得证定理. □

定理 C.4 (Hardy-Littlewood) 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数，$1 < p \le \infty$，那么存在常数 $C = C(n)$ 使得

$$\|Mf\|_p \le \frac{Cp}{p-1}\|f\|_p, \quad \forall f \in L^p.$$

证明 根据定理 C.2，算子 M 是弱 $(1,1)$ 型的. 根据初等性质，M 是弱 (∞,∞) 型的，因而，根据 Marcinkiewicz 定理，对于任意 $p > 1$，M 是强 (p,p) 型的. □

设 ϕ 为径向对称函数，记 $\phi_r(x) = \phi(x)$ 如果 $|x| \le r$；$\phi_r(x) = 0$ 如果 $|x| > r$. 我们有如下

命题 C.5 设 $\phi \in L^1$ 是一非负单减径向对称函数，f 是一 L^p 函数，则

$$\sup_{r>0} |\phi_r * f(x)| \le \|\phi\|_1 Mf(x).$$

证明 不妨设 $f \ge 0$，我们只需证明对任意 $r > 0$ 都有

$$\phi_r * f(x) \le \|\phi\|_1 Mf(x). \tag{C.12}$$

1° 若 $\phi = \chi_{B_\rho}$ 是 B_ρ 的特征函数，则

$$\begin{aligned}\phi_r * f(x) &\le \int \chi_{B_\rho}(x-y)f(y)dy \\ &= \int_{x+B_\rho} f(y)dy = \frac{m(B_\rho)}{m(B_\rho)}\int_{x+B_\rho} f(y)dy \\ &\le m(B_\rho)Mf(x) = \|\phi\|_1 Mf(x).\end{aligned}$$

若 $\phi = \sum_{j=1}^N a_j\chi_{B_j}$，其中 B_j 是中心在原点的球，则 (C.12) 仍成立.

2° 对于一般的单减径向函数，ϕ 可表达为上述类型的单增阶梯函数列的极限，应用单调收敛定理便完成命题的证明. □

2. Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式.

Sobolev 空间理论的核心是 Sobolev 不等式. 1938 年 S.L. Sobolev (见 [187]) 证明不等式

$$\iint_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^\lambda} dxdy \le C(n,p,\lambda)\|f\|_p \|g\|_q \tag{C.13a}$$

对所有 $f \in L^p$, $g \in L^q$ 成立，其中

$$\frac{1}{p}+\frac{\lambda}{n}+\frac{1}{q}=2, \quad p, q>1, \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1. \tag{C.13b}$$

并籍此证明著名的 Sobolev 不等式. 因 (C.13) 的一维情形首先是 Hardy 与 Littlewood (见 [113]) 证明的，现在不等式 (C.13) 连同其等价形式 (C.14) 通称 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式，简称 HLS 不等式.

HLS 不等式的另一形式是

$$\|f*|x|^{-\lambda}\|_q \le C_{n,p,\lambda}\|f\|_p, \quad f\in L^p(\mathbb{R}^n) \tag{C.14a}$$

其中 p, q, λ 都是正实数，满足

$$\frac{1}{p}+\frac{\lambda}{n}=1+\frac{1}{q}, \quad 0<\lambda<n, \quad 1<p,\ q<\infty. \tag{C.14b}$$

命题 C.6 不等式 (C.14) 与 (C.13) 的成立相互等价.

证明 首先证明 (C.14) 与 (C.13) 等价. 因

$$\iint_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^\lambda} dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} (|x|^{-\lambda}*g)f dx,$$

应用 Hölder 不等式立即由 (C.14) 推得 (C.13).

在不等式 (C.14) 的条件下，设 $f\in L^p$，则对任意函数 $w\in L^{\widetilde{q}}$ ($\widetilde{q}$ 是 q 的共轭数)，应用不等式 (C.13) 得

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|x|^{-\lambda}*f)wdx \le C(n,p,\lambda)\|f\|_p\|w\|_{\widetilde{q}}.$$

这就是说，$K*f$ 定义了 $L^{\widetilde{q}}$ 上的一个有界线性泛函，由 Riesz 表示定理知，$K*f\in L^q$ 且 $\|K*f\|_q \le C(n,p,\lambda)\|f\|_p$. □

定理 C.7 (Hardy-Littlewood-Sobolev 定理) 设 p, q, λ 满足条件 (C.14b), 则成立不等式

$$\|f * |x|^{-\lambda}\|_q \leq C_{n,p,\lambda}\|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

其中 $C_{n,p,\lambda}$ 是只依赖于 n, p, λ 的常数.

证明 设 B_R 是中心在原点，半径等于 R 的球，$R > 0$ 待定. 记

$$K_R(x) = \begin{cases} |x|^{-\lambda}, & \text{当 } |x| \leq R, \\ 0, & \text{当 } |x| > R, \end{cases}$$

并记 $K^R = |x|^{-\lambda} - K_R$. 不妨设 $u > 0$，我们有

$$\left|f * |x|^{-\lambda}\right| \leq \left|K_R * f\right| + \left|K^R * f\right|.$$

应用命题 C.5，我们有

$$\left|K_R * f\right| \leq \|K_R\|_1 Mf(x) = \frac{\omega_{n-1}}{n-\lambda} R^{n-\lambda} Mf(x). \tag{C.15}$$

我们也不妨设 $\|f\|_p = 1$，应用 Hölder 不等式，我们有

$$\left|K^R * f\right| \leq \|K^R\|_{\widetilde{p}}\, \|f\|_p = \|K^R\|_{\widetilde{p}}\,.$$

其中 $\widetilde{p} = p/(p-1)$. 根据条件 (C.14b)，$\lambda\widetilde{p} > n$，对上式有如下估计

$$\left|K^R * f\right| \leq C_2 R^{n/\widetilde{p}-\lambda}. \tag{C.16}$$

由 (C.15) 及 (C.16)

$$\left|f * |x|^{-\lambda}\right| \leq C_1 R^{n-\lambda} Mf(x) + C_2 R^{n/\widetilde{p}-\lambda}$$

取 $R = |Mf(x)|^{-p/n}$，代入上式得

$$\left|f * |x|^{-\lambda}\right| \leq (C_1 + C_2)\left|Mf(x)\right|^{p/q}$$

上式左右两边 q 次乘方并积分，应用 Hardy-Littlewood 定理 (p.331)，便得定理结论. □

四、广义 Marcinkiewicz 插值定理

下面的定理叫广义 Marcinkiewicz 插值定理，其中 $L^{p,q}$ 表示 Lorentz 空间.

定理 C.8 设 T 是一次可加算子，T 的定义域 $D(T)$ 包含其每个元素的截函数，也包含具有限测度的可测集的特征函数及其所有有限线性组合. 如果对于 $r_0 < r_1$，$p_0 \neq p_1$ 成立

$$[Tf]_{p_0,\infty} \leq K_0[f]_{r_0,1}, \quad \forall\, f \in D(T) \cap L^{r_0,1};$$

$$[Tf]_{p_1,\infty} \leq K_1[f]_{r_1,1}, \quad \forall\, f \in D(T) \cap L^{r_1,1};$$

则存在常数 K，使得对于任意 $1 \leq q \leq \infty$，有

$$[Tf]_{p,q} \leq K[f]_{r,q}, \quad \forall\, f \in D(T) \cap L^{r,q}$$

其中 p, r 满足

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

证明 见苗长兴 [236] 的 § 4.4 节. □

定理 C.9 设 T 是一个算子，对每一个 $\lambda > 0$，T 可分解为 $T = T_1 + T_2$，其中 T_1，T_2 满足

T_1 是 (p,∞) 型， 具常数 $\lambda/2$;

T_2 是 (p,p) 型， 具常数 $c\lambda^{1-(q/p)}$.

结论: T 是弱 (p,q) 型，且

$$[Tu]_q \leq (2c)^{p/q}\|u\|_p, \quad \forall\, u \in L^p.$$

证明 对于 $f \in L^p$，根据分布函数的性质 (见 p.29 性质 (3)) 有

$$(Tf)_*(\lambda) \leq (T_1 f)_*(\lambda/2) + (T_2 f)_*(\lambda/2).$$

因 T_1 是具常数 $(\lambda/2)$ 的 (p,∞) 算子，所以 $\|T_1 f\|_\infty \leq (\lambda/2)$，由此可知

$$(T_1 f)_*(\lambda/2) = 0.$$

注意到 T_2 是 (p,p) 型算子 (具常数 $c\lambda^{1-q/p}$)，应用 Chebyshev 不等式得

$$\begin{aligned}(Tf)_*(\lambda) &\le (T_2f)_*(\lambda/2)\\ &\le \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-p}\int_{|f|>\lambda/2}|T_2f|^p\,\mathrm{d}x\\ &\le (2c)^p\lambda^{-q}\|f\|_p^p.\end{aligned}$$

故

$$\sup_{\lambda>0}\lambda\big[(Tf)_*(\lambda)\big]^{1/q}\le (2c)^{p/q}\|f\|_p.$$

这样便完成定理的证明. □

作为定理 C.9 的一个应用，我们有

命题 C.10 设 $K\in L^1\cap L^p_w$ $(p>1)$，则成立下列广义 Young 不等式

$$[K*f]_p\le C_p[K]_p\|f\|_1,\quad \forall f\in L^1.$$

证明 任给 $\lambda>0$，令

$$K_\lambda(x)=\begin{cases}K(x) & 若\ |K(x)|\le\lambda/2,\\ 0 & 若\ |K(x)|>\lambda/2,\end{cases}$$

并记 $K^\lambda(x)=K(x)-K_\lambda(x)$. 分别令 $T_1f=K_\lambda*f$，$T_2f=K^\lambda*f$. 则有

$$\|T_1f\|_\infty\le(\lambda/2)\|f\|_1,$$

即 T_1 是具常数 $(\lambda/2)$ 的 $(1,\infty)$ 算子. 另一方面，应用 Young 不等式，我们有

$$\|T_2f\|_1=\|K^\lambda*f\|_1\le\|K^\lambda\|_1\,\|f\|_1. \tag{C.17}$$

注意 $(K^\lambda)_*(t)\le K_*(t)\le(A/t)^p$，其中 $A=[K]_p$，由分布积分公式得

$$\begin{aligned}\|K^\lambda\|_1=\int K^\lambda(x)\,\mathrm{d}x&=\int_{\lambda/2}^\infty(K^\lambda)_*(t)\,\mathrm{d}t\\ &\le\int_{\lambda/2}^\infty\frac{A^p}{t^p}\,\mathrm{d}t\le\frac{2^{p-1}}{p-1}A^p\lambda^{1-p}.\end{aligned}$$

从而由 (C.17) 知，T_2 是具常数 $C_pA^p\lambda^{1-p}$ 的 (1,1) 型算子，应用定理 C.9 得：$[K*f]_p\le C_pA\,\|f\|_p$. □

参考文献

[1] Aubin Th., *Sur la fonction exponentille*, C. R. Acad. Sc. Paris 270A (1970), 1514.

[2] Aubin Th., *Problèmes isopérimétriques et espace de Sobolev,* J. Diff. Geom. 11 (1976), 573–598. (See also C. R. Acad. Sc. Paris 280A (1975), 279–281.)

[3] Aubin Th., *Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pures et Appl. 55 (1976), 269–296.

[4] Aubin Th., *Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et un théorème de Fredholm non linéaire pour la transformation conforme de la courebure scalaire,* J. Funct. Anal. 32(1979), 148–174.

[5] Aubin Th., *Nonlinear analysis on manifolds, Monge-Ampère equations,* Grundlehern der Mathematischen Wissenschaften 252, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[6] Aubin Th., *Some nonlinear problems in Riemannian geometry,* Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[7] Aubin Th., *Espace de Sobolev sur les variétés riemanniennes* , Bull. Sc. Math. 100 (1976), 149–173.

[8] Aubin Th. and A. Bahri, *Une hypothèse de topologie algebrique pour le problème de la courbure scalaire prescrite,* J Math. Pures Appl. 76(1997), 843–850.

[9] Aubin Th. and E. Hebey, *Courbure scalaire precrite,* Bull. Sc. Math. 115 (1991), 125–132.

[10] Aubin Th. and W. Zh. Wang, *Positive solutions of Ambrosetti-Prodi problems involving the critical Sobolev exponent*, Bull. Sc. Math. 125 (4) (2001), 311–340.

[11] Aubin Th. and W. Zh. Wang, *Fixed points of convex maps in ordered Banach spaces,* Bull. Sc. Math. 125 (8) (2001), 667–687.

[12] Acerbi E. amd N. Fusco, *Semicontinuity problems in the calculus of variations,* Arch. Rat. Mech. Anal. 86 (1984), 125–145.

[13] Adams R.A., *Sobolev spaces,* Academic press, New York-London, 1975.
中译本：叶其孝译, 索伯列夫空间, 人民教育出版社, 北京, 1981.

[14] Adams D.R., *A sharp inequality of J. Moser for higher order derivatives,* Ann. of Math. 128 (1988), 385–398.

[15] Adimurthi and K. Sandeep, *Existence and Non existence of first eigenvalue fo perturbed Hardy-Sobolev operator*, Proc. Royar Soc. Edin. 132 (2002), 1021–1043.

[16] Alvino A., *Un caso limite della diseguaglianza di Sobolev in spazi di Lorentz*, Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. Napoli 44 (1977), 105–112.

[17] Alvino A., P.L. Lions and G. Trombetti, *On optimization problems with prescribed rearrangements*, Nonlinear Analysis T.M.A. 13(1989), 185–220.

[18] Alvino A., P.L. Lions and G. Trombetti, *Comparison results for elliptic and parabolic equations via Schwarz symmetrization,* Ann. I.H.P. An. Non Lin. 7 (1990), 37–65.

[19] Almgren F.J. and E.H. Lieb, *Symmetric decreasing rearrangement can be discontinuous,* Bull. (new ser.) Amer. Math. Soc. 20(1989), 177–180.

[20] Almgren F.J. and E.H. Lieb, *Symmetric Decreasing Rearrangement Is Sometimes Continuous,* J. Amer. Math. Soc. 2 (1989), 683–773.

[21] Amann H., *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces,* SIAM Review 18 (1976), 620-709.

[22] Ambrosetti A. and P. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications,* J. Funct. Anal. 14 (1973), 349–381.

[23] Ancona A., *Une propriété d'invariance des ensembles absorbants par perturbation d'un opérateur elliptique,* Comm. PDE 4 (1979), 321–337.

[24] Arnowitt R., S. Deser and C. Misner, *Canonical variables for general relativity,* Phys. Rev. 117 (1960),1595–1602.

[25] Arnowitt R., S. Deser and C. Misner, *Energy and the criteria for radiation in general relativity,* Phys. Rev. 118 (1960), 1100–1104.

[26] Arnowitt R., S. Deser and C. Misner, *Coordinate invariance and energy expressions in general relativity,* Phys. Rev. 122 (1961), 997–1006.

[27] Arnold V. I., *Ordinary differential equations,* Massachusetts Institute of Technology Press,1978.
中译本：沈家骐, 周宝熙, 卢亭鹤译, 常微分方程, 科学出版社, 北京, 1985.

[28] Bahri A., *Critical points at infinity in some variational problems,* Research Notes in Mathematics 182 (1988), Longman-Pitman, London.

[29] Bahri A., *Another proof of the Yamabe conjecture for locally conformally flat manifolds,* Nonlinear Anal. 20 (1993) 1261–1278.

[30] Bahri A., *Addenda to the book "Critical points at infinity in some variational problems" and to the paper "The scalar-curvature problem on the standard three-dimensional sphere",* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 13 (1996),733–739.

[31] Bahri A. and J.M. Coron, *On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent: the effect of the topology of the domain*, Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988), 253–294.

[32] Bahri A. and J.M. Coron, *The scalar-curvature problem on the standard three-dimensional sphere,* J. Funct. Anal. 95 (1991), 106–172.

[33] Bahri A. and P. H. Rabinowitz, *Periodic solutions of Hamiltonian systems of 3-body type,* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 8 (1991),561–649.

[34] Bandle C., *Isoperimetric inequalities and applications*, Pitman, Boston, 1980.

[35] Bartnik R., The mass of anasymptotically flat manifold, Comm. Pure Appl. Math. 34 (1986), 661–693.

[36] Ben Naoum, A. K., C. Troestler and M. Willem, *Extrema problems with critical Sobolev exponents on unbounded domains.* Nonlinear Analysis T. M. A. 26 (1996), 823 - -833.

[37] Berestycki T. and P. L. Lions, *Nonlinear field equations I.—Existence of a ground state,* Arch. Rat. Mech. Anal. 82 (1983), 313-346.

[38] Berger M.S., *On Riemannian structures of prescribed Gaussian curvature for compact 2-manifolds*, J. Diff. Geo. 5 (1971), 325–332.

[39] Berger M.S., *Nonlinearity and functional analysis*, Academic Press, New York, 1977.

[40] Berger Marcel, *A panoramic view of Riemannian geometry*, Springer-Verlag, 2003.

[41] Bethuel F., P. Caldiroli and M. Guida *Parametric surfaces with prescribed mean curvature,* Turin Lectures, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino 60, 4 (2002), 175–231.

[42] Bethuel F., *Un résultat de régularité pour les solutions de l'équation de surfaces à courbure moyenne prescrite,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 314 (1992), 1003 - 1007.

[43] Bethuel F. and J.M. Ghidaglia, *Improved regularity of solutions to elliptic equations involving Jacobians and applications*, J. Math. pures Appl. 72 (1993), 441–474.

[44] Bethuel F. and O. Rey, *Multiple solutions to the Plateau problem for nonconstant mean curvature*, Duke Math. J. 73(1994), 593–646.

[45] Bianchi G., J. Chabrowski and A. Szulkin, *On symmetric solutions of an elliptic equation with a nonlinearity involving critical Sobolev exponent*, Nonlinear Analysis T. M. A. 26 (1996), 823–833.

[46] Brezis H., *Elliptic equations with limiting Sobolev exponents – The impact of topology*, Comm. Pure Apl. Math. 39 (1986), 17–19.

[47] Brezis H., *Degree theory : old and new*, Lecture Notes of Univercité P. et M. Cuirie (2006).

[48] Brezis H. and J.M. Coron, *Multiple solutions of H-systems and Rellich's conjecture,* Com. Pure Appl. 37 (1984), 149–187.

[49] Brezis H. and J.M. Coron, *Convergence of solutions of H-systems or how to blow up bubbles,* Arch. Rat. Mech. Anal. 89 (1985), 21–56.

[50] Brezis H. and K. Kato, *Remarks on the Schrödinger operator with singular complex potential,* J. Math. Pures et Appl. 58 (1979), 137–151.

[51] Brezis H. and E. Lieb, A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983), 486–490.

[52] Brezis H. and L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents,* Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), 437–477.

[53] Brezis H. and L. Nirenberg, *Remarks on finding critical points*, Comm. Pure and Appl. Math. 44(1991), 939-963.

[54] Brezis H. and L. Nirenberg, *Degree theory and BMO. I, compact manifolds without boundaries*, Selecta Math. (N.S.) (1995),197–263.

[55] Brezis H. and A.C. Ponce, *Remarks on the strong maximum principle*, Differential Integral Equations 16 (2007),1–12.

[56] Brezis H. and S. Waigner, *A note on limiting cases of Sobolev embeddings and convolution inequalities*, Communs. partial diff. Eqns 5 (1980), 773–789.

[57] Brock F. and A. Solynin, *An approach to symmetrization via polarization*, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), 1759–1796.

[58] Brothers J. and W. Ziemer, *Minimal rearrangements of Sobolev functions*, J. Reine. Angew. Math. 384 (1988), 153–179.

[59] Brown R., *Harmonic Analysis*, Lecture Notes at Univ. Kent., 2001.

[60] Caffarelli L., R. Kohn and L. Nirenberg, *First Order Interpolation Inequality with Weights*, Compositio Math. 53 (1984) 259–275.

[62] Caldiroli P. and R. Musina, *The Dirichlet problem for H-Systems with small boundary data: Blowup phenomena and nonexistence results*, Arch. Rat. Mech. Anal., 181 (2006), 142–?.

[62] Caldiroli P. and R. Musina, *On palais-smale sequences for H-systems: some examples*, Advances in Differential Equations 11 (2006), 931-960.

[63] Cantor M., Elliptic operators and the decomposition of tnsor fields, Bull. Amer. Math. Soc. (NS) 5 (1981),235–262.

[64] Cao D. M. and Li Y.Y., *Results on positive solutions of elliptic equations with a critical Hardy-Sobolev operator*, Methods and Applications of Analysis 15 (2008), 81–96.

[65] Chaljub-Simon A. and Y. Choquet-Bruhat, *Problèmes elliptiques du second ordre sur une variété euclidienne à l'infini*, Ann. Fac. Sci. Toulouse 1 (1978), 9–25.

[66] Chang K.C., *Heat flow and boundary value problems for harmonic maps*, Ann. Inst. Henri Poincare Anal. 6 (1989), 363-395.

[67] Chang K.C. and J.Q. Liu, *On Nirenberg's problem*, International J. Math. 4 (1993), 35–58.

[68] Chang S.-Y. A., M. Gursky and P. Yang, *The scalar curvature equation on 2- and 3-spheres*, Calculus of Variation 1 (1993), 205–229.

[69] Chang S.-Y. A. and P.C. Yang, *Prescribing Gaussian curvature on* S^2, Acta Math. 159 (1987), 215–259.

[70] Chang S.-Y. A. and P. Yang, *Conformal deformation of metrics on* S^2, J. Diff. Geom., 27 (1988), 259–296.

[71] Chang S.Y.A. and P.C. Yang , *A perturbation result in prescribing scalar curvature on* S^n, Duke Math. J. 64(1991), 27–69.

[72] Chang S.Y. A., *Conformal invariants and partial differential equations*, Bull. Amer.

Math. Soc. (NS)42 (2005).

[73] Chavel I., *Eigenvalues in Riemannian geometry,* Academic Press, 1984

[74] Chavel I., *Riemannian geometry: a modern introduction,* Cambrige Tracts in Mathematics, Cambrige University Press, 1993.

[75] Chavel I., *Isoperimetric Inequalities: Differential Geometric and Analytic Perspectives* , Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
中译本：等周不等式(影印版), 世界图书出版公司, 北京, 2003.

[78] Cheeger J. and D. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland, New York, 1975.

[77] Cianchi A. and N. Fusco, *Functions of bounded variation and rearrangements*, Arch. Rat. Mech. Anal. 165 (2002),1-40

[78] Cheeger J. and D. G. Ebin, Comparision theorems in Riemannian geometry, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975.

[79] Coifman R., P.L. Lions, Y. Meyer and S. Semmes, *Compensated compactness and Hardy spaces,* J. Math. Pure and Appl.72(1993), 247–286.

[80] Coron J.M., *Une deuxième surface à courbure moyenne prescrite s'appuyant sur une courbe donnée,* Journées Équations aux Dérivées Partielles (1983), Art. No. 5.

[81] Coron J.M., *Topologie et cas limite des injections de Sobolev,* C.R. Acad. Sc., Paris, 299 (1984), 209-211.

[82] Courant R. and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, volume I, Interscience, New York-London, 1953.
中译本：钱敏,郭敦仁译, 数学物理方法, 第I卷, 科学出版社, 1958.

[83] Dancer E. N., The effect of domain shape on the number of positive solutions of certain nonlinear equations, J. Diff. Eqns. 74 (1988), 120–156.

[84] Dancer E.N., *A note on an equation with critical exponent,* Bull. London Math. Soc. 20 (1988), 600–602.

[85] Davies E.B.and A.M. Hinz, Explicit constants for Rellich inequalities in $L_p(\Omega)$, Math. Z. 227 (1998), 511–523.

[86] Dieudonné J., *Treatise on analysis vol. III*, Academic Press, New York, 1972.

[87] Ding W.-Y., *On a conformally invariant elliptic equation on* $\mathbb{R}^n$, Comm. Math. Phys. 107 (1986), 331–335.

[88] Ding, W.-Y. and W.-M. Ni, *On the elliptic equation* $\Delta u + Ku^{(n+2)/(n-2)} = 0$ *and related topics,* Duke Math. J. 52 (1985), 485–506.

[89] Ding W.-Y. and W.-M. Ni, *On the existence of positive entire solution of a semilinear elliptic equation* , Arch. Rat. Mech. Anal. 91 (1986), 283–308.

[90] Douglas J., *Solution of problem of Plateau,* Trans. Amer. Math. Soc. 33 (1931), 263–321.

[91] Eilenberg S. and N. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton Univ. Press, 1952.

[92] Ekeland I., On the variational principle, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974), 324–353.

[93] Evans L.C. and R.F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Math., CRC Press, Boca Raton, 1992.

[94] Escobar J.F., *Positive solutions for some semilinear elliptic equations with critical Sobolev exponents,* Comm. Pure Appl. Math. 40 (1987), 623–657.

[95] Escobar J.F. and R. Schoen, *Conformal metrics with prescribed scalar curvature*, Invent. Math. 86 (1986), 243–254.

[96] Faris W.J., *Weak Lebesgue spaces and quantum mechanical binding,* Duke Math. J. 46(1976), 365 – 373.

[97] Federer H., *Curvature measures*, Trans. Amer. Math. Soc. 93 (1959),418–491.

[98] Federer H., *Geometric measure theory,* Grundlehren 153, Springer, 1969.

[99] Fefferman C. and E.M. Stein, *H^p spaces of several variables*, Acta Math. 129 (1972) 137–193.

[100] Fleming W. and R. Rishel, *An integral formula for total gradient variation*, Archiv der Mathematik 11 (1960),218–222.

[101] Fournier J., *Mixed norms and rearrangements: Sobolev's inequality and Littlewood's inequality,* Ann. Mat. Pura Appl. 148 (1987), 51 – 76.

[102] Gagliardo E., *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, Ricerche Mat. 7 (1958), 102–137.

[103] Gautam S.Z., *A critical exponent Balian-Low theorem,* arXiv: math/0703905v1 [math.CA] 30 Mar 2007.

[104] Gazzola F., H. Grunau and E. Mitidieri, *Hardy inequalities with optimal constants and remainder terms* Trans. Amer. Math. Soc. 356 (2003), 2149–2168.

[105] Gibbons G., S. Hawking and M.Perry, *Path integrals and the indefiniteness of the gravitational action,* Nucl. Phys. B138(1978), 141–150.

[106] Gilbarg D. and N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order, 2nd edition,* Springer-Verlag, 1983.

[107] Gidas B., W.-M. Ni and L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle,* Comm. Math. Phys. 68 (1979), 209–243.

[108] Grandall M.G. and P. Rabinowitz, *Some continuation and variational methods for positive solutions of nonlinear eigenvalue problems,* Arch. Rat. Mech. Anal. 46 (1975), 81–95.

[109] Halmos P.R., *Measure Theory*, D. van Nostrand and Co., 1950.
中译本：王建华译，测度论，科学出版社，1958.

[110] Hardy G.H.,*Notes on some points in the integral calculus*, Messenger Math. 48 (1919), 107–112.

[111] Hardy G.H.,*Note on a theorem of Hilbert*, Math. Z. 6 (1920), 314–317.

[112] Hardy, G. H. and J. E. Littlewood, *Some properties of fractional integrals* (1), Math. Z. 27 (1928), 565–606.

[113] Hardy G. H., J. E. Littlewood and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1934.

[114] Hebey E. and M. Vaugon, *Meilleures constantes dans le théorèm d'inclusion de Sobolev*, Ann. de l'Institut Henri Poincaré, Analyse non linéaire 13 (1996), 57–93.

[115] Hebey E. and M. Vaugon, *Sobolev spaces in the presence of symmetries*, J. Math. Pures Appl. 76 (1997), 859–881.

[116] Hebey E. and M. Vaugon, From best constants to critical functions, Math. Z. 237 (2001),737–767.

[117] Helein F., *Régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une sphere*, C. R. Acad. Sci. Paris 311 sér. I(1990), 519–524.

[118] Helein F., *Régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une variété riemannienne*, C. R. Acad. Sci. Paris 312 sér. I (1991), 591–596.

[119] Heinz E., *On the non-existence of a surface of a constant mean curvature with finite area and prescribed rectifiable boundary*, Arch. Rat. Mech. Anal. 35 (1969), 249–252.

[120] Hildebrandt S., *On the Plateau problem for surface of constant mean curvature*, Comm. Pure Appl. Math. 23 (1970), 97–114.

[121] Kawohl B., *Rearrangements and convexity of level sets in PDE*, Lecture Notes in Mathematics vol. 1150, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[122] Karlsen K., *Notes on weak convergence*, Lecture notes MAT4380(2006) at CMA.

[123] Kazdan J. and F. Warner, *Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure*, J. of Diff. Geom. 10 (1975), 113–134.

[124] Kazdan J. and F. Warner, *Existence and conformal deformation of metrics with prescribed Gaussian and scalar curvature*, Ann. of Math. 101 (1975), 14–47.

[125] Kazdan J. and F. Warner, *Remarks on some quasilinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. 38 (1975), 567–579.

[126] Kesavan S., *Symmetrization and applications*, Series in Analysis, World Scientific, 2006.

[127] Kreyszig E., *Differential Geometry*, Dover Publications, New York, 1991.

[128] John F. and L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscilation*, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 415–426.

[129] Lee J. and T. Parker, *The Yamabe problem*, Bull. Amer. Math. Soc. 17 (1987), 37–91.

[130] Lee M.-Y., *Different approaches to the H^p boundedness of Riesz transforms*, Communications in Mathematical Analysis 1(2006),101–108.

[131] Lelong-Ferrand J., *Transformations conformes et quasi conformes des variétés riemanniennes compactes (dèmonstrations de la conjecture de Lichnerowicz)*, Mem. Acad. Roy. Belg. Cl. Sc. Mem. Coll. 39(1971).

[132] Lévy P., *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier-Villars, Paris, 1954.

[133] Li S.J. and M. Willem, *Applications of local linking to critical point theory*, J. Math. Anal. Appl. 189 (1995), 6–32.

[134] Li Y.Y., *Prescribing scalar curvature on S^n and related problems, part I,* Journal of Differential Equations 120 (1995), 319–410.

[135] Lieb E. H., *Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and* related inequalities, Annals of Math. 118 (1983) 349—374

[136] Lieb E. H., *Existence and uniqueness of the minimizing solutions of Choquard's non-linear equation,* Studies in Appl. Math. 57 (1977), 93–105.

[137] Lions J.L. and E. Magenes, *Non-homogeneous boundary value problems and applications: vol. I and II,* Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[138] Lions P.L., *Symétrie et compacité dans les espaces de Sobolev,* J. Funct. Anal. 49 (1982), 315–334.

[139] Lions P.-L., *Application de la méthode concentration-compacité à l'existence de fonctions extrémales,* C. R. Acad. Sc. Paris 296 (sér I, 1983), 645–648.

[140] Lions P.-L., *The concentration compactness principle in the calculus of variations. The compact case, part 1 and part 2* Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse non linéaire 1 (1984), 109–145; 1 (1984), 223–283.

[141] Lions P.-L., *The concentration compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 1 and part 2* , Rev. Mat. Iberoamericana 1 (1985), 145–201; 2 (1985), 45–121.

[142] Lockhart R., *Fredholm properties of a class of elliptic operators on non-compact manifolds,* Duke Math. J. 48 (1981), 289–312.

[143] Maddox I. J., *Elements of Functional Analysis,* Cambridge University Press, 1970. 中译本：朱晓亮, 张文深译， 泛函分析初步, 人民教育出版社, 1981.

[144] Maz'ya V., *Sobolev Spaces,* Spinger-Verlag, Berlin, 1985.

[145] Maz'ya V., *Lectures on isoperimetric and isocapacitary inequalities in the theory of Sobolev spaces,* Contemporary Mathematics 338 (2003),307–340.

[146] McOwen R., *Behavior of the Laplacian on weighted Sobolev spaces,* Comm. Pure Appl. Math. 32 (1993), 125–151.

[147] Milnor J., *Morse Theory,* Annals of Math. Studies 51, Princeton Univ. Press, 1973.

[148] Mitidieri E., *A Rellich type identity and applications,* Comm. Partial Diff. Equations 18(1993), 125–151.

[149] Morrey C., *Functions of several variables and absolute continuity, II,* Duke Math. J.6 (1940), 187–215.

[150] Morrey C., *Quasi-convexity and the lower semicontinuity of multiple integrals,* Pacific J. Math. 2 (1952), 25–53.

[151] Moser J., *A sharp form of an inequality by N. Trudinger,* Indiana Univ. Math. J. 20 (1971) 1077–1092.

[152] Moser J., *On a nonlinear problem in differential geometry,* In *Dynamical Systems* edited by M. Peixoto, Academic Press, New York, 1973.

[153] Nash J., *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations,* Amer. J. Math.

80(1958), 931–954.

[154] Nehari Z., *On a nonlinear differential equation arising in nuclear physics*, Proc. Roy. Irish Acad. 62 (1963), 117–135.

[155] Naumann J., *Remarks on the prehistory of Sobolev spaces*, Preprint Nr. 2002-2; Humboldt-Univ., Inst. f. Math. (http://www.mathematik.hu-berlin.de/publ./pre/2002/M-02-2.html)

[156] Nirenberg L., *On elliptic partial differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 13 (1959), 116–162.

[157] Nirenberg L., Topics on nonlinear functional analysis, Courant Inst. Lect. Notes, 1974.

[158] Nirenberg L., *Variational and topological methods in nonlinear problems,* Bull. Amer. Math. Soc. 4 (1981), 267–302.

[159] Nirenberg L. and H. Walker, *The null spaces of elliptic operators in* $\mathbb{R}^n$, J. Math. Anal. Appl. 42 (1973), 271–301.

[160] Ni W.-M. and R. Nussbaum, *Uniqueness and nonuniqueness for positive radial solutions of* $\Delta u + f(u,r) = 0$ Comm. Pure App. Math. 38 (1985), 65–108.

[161] Ni W.-M., *A nonlinear Dirichlet problem on the unit ball and its applications,* Indiana Univ. Math. J. 31 (1982), 801–807.

[162] Ni W.-M., *On the elliptic equation* $\Delta u + K(x)u^{(n+2)/(n-2)} = 0$, *its generalizations, and applications in geometry,* Indiana Univ. Math. J. 31 (1982), 493–529.

[163] Osgood B., R. Phillips and P. Sarnak, *Extremals of determinants of Laplacians,* J. Funct. Anal. 80(1988), 148–211.

[164] Parker T. and C. Taubes, *On Witten's proof of the positive energy theorem,* Comm. Math. Phys. 84(1982), 223–238.

[165] Passaseo D., *Some sufficient conditions for the existence of positive solutions to the equation* $-\Delta u + a(x)u = u^{\frac{n+2}{n-2}}$ *in bounded domains,* Ann. Inst. Henri Poincaré. 13 (1996), 185–227.

[166] Peetre J., *Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff,* Annales de l'institut Fourier 16(1966), 279–317.

[167] Peral I. and J. L. Vazquez, *On the stability or instability of the singular solutions with exponential reaction term*, Arch. Rat. Mech. Anal. 129 (1995), 201–224.

[168] Petrov A. Z., *Einstein Spaces*, Pergamon, Oxford, 1969.

[169] Pohozaev, S., *Eigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Soviet Math. Dokl. 6 (1965), 1408–1411.
(translated from Russian Dokl. Akad. Nauk SSSR 165, 1965, pp. 33–36.)

[170] Pólya G. and G. Szegö, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1951.

[171] Radó T., *On Plateau's problem,* Ann. of Math. 31 (1930), 457 - 469.

[172] Royden H. L., *Real Analysis*, 3rd ed., Macmillan Pub. Company, New York, 1988.
中译本：叶培新译，实分析，机械工业出版社.

[173] Sacks J. and K. Uhlenbeck, *The existence of minimal immersion 2-spheres*, Ann. of Math. 113 (1981), 1–24.

[174] Sarason D., *Functions of vanishing mean oscillation,* Trans. Amer. Math. Soc. 207(1975), 391–405.

[175] Schaftingen J. van, *Universal approximation of symmetrizations by polarizations,* Proc. Amer. Math. Soc.134 (2005), 177–186.

[176] Schoen R., *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Diff. Geom. 20 (1984), 479–495.

[177] Schoen R. and Yau S.-T., *On the structure of manifolds with positive scalar curvature,* Manuscripta Math. 28(1979), 159–183

[178] Schoen R. and Yau S.-T., *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity,* Comm. Math. Phys. 65 (1979), 45–76.

[179] Schoen R. and Yau S.-T., *Proof of the positive action conjecture in quantum relativity* Phys. Rev. Lett. 42 (1979), 547–548.

[180] Schoen R. and Yau S.-T., *The energy and the linear momentum of space-times in general relativity,* Comm. Math. Phys. 79 (1981), 47–51.

[181] Schoen R. and Yau S.-T., *Proof of the positive mass theorem II* Comm. Math. Phys. 79 (1981), 231–260.

[182] Schoen R. and Yau S.-T., *Conformally flat manifolds, Klein groups and scalar curvature,* Ivent. Math. 92 (1988), 47–71.

[183] Pucci P. and J. Serrin, *A general variational identity,* Indiana Univ. Math. J. 35 (1986?), 681–703.

[184] Strichartz R. S., *Multipliers on fractional Sobolev spaces,* J. Math. Mech. 16 (1967), 1031 – 1060.

[185] Serrin J., *On the strong maximum principle for quasilinear second order differential inequalities,* J. Functional Anal., 5 (1970),184-183.

[186] Sobolev S.L., *On a theorem of functional annalysis*, Mat. Sb. 4 (1938), 471–497. (A.M.S. Transl. Ser. 2, 34 (1963), 39–68.)

[187] Sobolev S.L., *Some applications of functional analysis in mathematical physics* (Russian), Lenigrad 1950. (Amer. Math. Soc. Transl., Math. mono. 7, 1963.)

[188] Stampacchia G., *Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréeal, 1966.

[189] Steffen K., *Fächen constanter mittlerer krümmung mit vorgegebenem volumen öder flächeninhalt,* Arch. Rat. Mech. Anal. 49 (1972), 99–128.

[190] Steffen K., *On the existence of surfaces with prescribed mean curvature and boundary,* Math. Z. 146 (1976), 113–135.

[191] Stein E.M. and G. Weiss, *On the theory of harmonic functions of several variables* Acta Math. 103(1960), 25–62.

[192] Struwe M., *A global compactness result for elliptic boundary problems involving lim-*

iting nonlinearities, Math. Z. 187 (1984), 511–517.

[193] Struwe M., *Large H-surfaces via the mountain pass lemma,* Math. Ann. 270 (1985), 441–459.

[194] Struwe M., *Non-uniqueness in the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature,* Arch. Rat. Mech. Anal. 93(1986), 135–157.

[195] Struwe M., *Plateau's problem and the calculus of variations,* Princeton Univ. Press, 1988.

[196] Struwe M., *Variational Methods,* 3rd Edition, Springer, Berlin, Heidelberg, 2000.

[197] Talenti G., *Best constant in Sobolev inequality,* Ann. di Mat. Pura Appl. 110–111 (1976), 353–372.

[198] Taubes C.H., *Existence of a non-minimal solutions to the SU(2) Yang-Mills-Higgs equations*, Part I, Comm. Math. Phys. 86 (1982), 257–298.

[199] Talenti G., Elliptic equations and rearrangements, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 3(1976), 697–718.

[200] Titchmarsh, The theory of functions, Oxford University Press, London, 1939. 中译本：E.C.梯其玛希著, 吴锦译, 函数论, 科学出版社, 北京, 1962.

[201] Trüdinger N., *On imbeddings into Orlicz spaces and some applications,* J. Math. Mech. 17 (1967), 473–483.

[202] Trüdinger N., *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds,* Anñ. Scuola Norm. Sup. Pissa 22 (1968), 265–274.

[203] Trüdinger N., *Linear elliptic operators with measurable coefficients,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pissa 27 (1973), 265–308.

[204] van der Vorst R.C.A.M., *Variational identities and applications to differential systems,* Arch. Rat. Mech. Anal. 116 (1991), 375-398.

[205] Wang W. Zh., *Problème d'Ambrosetti-Prodi avec exposant critique sur les variétés riemanniennes compactes,* Thèse d'lUniversité Pierre and Marie Curie, 1998.

[206] Wang W. Zh. (王文智), *Sobolev embeddings involving symmetry,* Bull. Sc. Math. 130 (2006),269 – 278.

[207] Wang, W. Zh. (王文智), *Remarks on Sobolev spaces on symmetric domains,* (to appear).

[208] Wente H., *An existence theorem for surfaces of constant mean curvature,* J. Math. Anal. Appl. 26 (1969), 318–344.

[209] Wente H., *Large solutions to the volume constrained Plateau problem,* Arch. Rat. Mech. Anal. 75 (1980), 59–77.

[210] Wente H., *The differential equation* $-\Delta x = 2H(x_u \wedge x_v)$ *with vanishing boundary values,* Proc. A.M.S. 50 (1975), 131–137.

[211] Witten E., *A new proof of the positive energy theorem,* Comm. Math. Phys., 80(1981), 381–402.

[212] Yamabe H., *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds,* Osaka

Math. J. 12 (1960), 21–37.

[213] Yau S.-T., *Structure of Three-Manifolds – Poincaré and geometrization conjectures*, Talk given at the Morningside Center of Mathematics on June 20, 2006.

[214] Yosida K.(吉田耕作), *Functional Analysis* (5th edition), Springer-Verlag, 1977. (吴元恺等译, 泛函分析, 高等教育出版社, 北京, 1980.)

[215] Zhang Y. and P.H. Zhao, *Sobolev embeddings involving symmetry and its application to quasilinear elliptic equations with supercritical growth*, Applied Mathematics Letters (to appear).

[216] Zhao P.H. and C.K. Zhong, *Positive solutions of elliptic equations involing both supercritical and sublinear growth*, Houston Journal of Mathematics 28(2002) 649–663.

[217] Zheng Y.-X., Regularity of weak Solutions to a two-Dimensional modified Dirac-Klein-Gordon system of equations, Commun. Math. Phys. 151(1993), 67–87.

[218] Ziemer W. P., *Weakly Differentiable Functions*, Springer-Verlag, 1989. ((影印本) 弱可微函数, 世界图书出版公司)

[219] 陈文(山原), 非线性泛函分析, 甘肃人民出版社, 兰州, 1982.

[220] 陈维桓, 李兴校, 黎曼几何引论 (上), 北京大学出版社, 2002.

[221] 陈维桓, 李兴校, 黎曼几何引论 (下), 北京大学出版社, 2002.

[222] 陈省身, 陈维桓, 微分几何讲义 (第二版), 北京大学出版社, 北京, 2004.

[223] 陈亚浙, 吴兰成, 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组, 科学出版社, 北京, 1991.

[224] 陈亚浙, 二阶抛物型偏微分方程, 北京大学出版社, 北京, 2002.

[225] 陈吉象, 代数拓扑基础讲义, 高等教育出版社, 1987.

[226] 丁勇, 陆善镇, 一类多线性齐性算子的 Hardy 空间估计, 中国科学 A 辑 42(1999), 518–526.

[227] 董光昌, 线性二阶偏微分方程, 浙江大学出版社,杭州,1987.

[228] 范先令, 集值 *A-proper* 映射的一致极限的广义度理论, 兰州大学学报 19:3(1983),26–35.

[229] 关肇直,张恭庆,冯德兴, 线性泛函分析入门, 上海科学技术出版社,上海,1979.

[230] 郭大均, 非线性泛函分析 (第二版), 山东科技出版社, 济南, 2001.

[231] 郭大均, 孙经先, 抽象空间常微分方程, 山东科学技术出版社, 济南, 1989.

[232] 江泽涵, 拓扑学引论, 上海科学技术出版社, 1978.

[233] 江泽坚, 吴智泉, 实变函数论(第二版), 高等教育出版社,北京,1994.

[234] 韩永生, 近代调和分析方法及其应用, 科学出版社,北京,1988.

[235] 陆善镇, H^p 空间实变理论及其应用, 上海科学技术出版社,上海,1992.

[236] 苗长兴, 调和分析及其在偏微分方程中的应用(第二版), 科学出版社,北京,2004.

[237] 丘成桐, 孙理察, 微分几何, 纯粹数学与应用数学专著第18号, 科学出版社, 1988. 英译本: Schoen R. and S.-T. Yau , *Lectures on differential geometry*, International Press, 1994.

[238] 沈尧天, 姚仰新,陈志辉, $\mathbb{R}^2$ 中含临界位势的非线性椭圆问题, 中国科学(A辑) 34 (2004), 610–624.

[239] 石原繁, 微分几何概论, 东北工学院出版社, 1982.
[240] 苏维宜, 近代分析引论, 北京大学出版社, 北京, 2000.
[241] 王文智,张建文,李庆士, 方程 $-\Delta u + \lambda u = u^{\frac{n+2}{n-2}}$ 的正解, 太原理工大学学报 27 (1996),43–48.
[242] 王文智,邸继征, 一个嵌入引理及其应用, 数学研究与评论 27 (2007), 963–966.
[243] 王文智, 具临界 Sobolev 指标非线性椭圆方程的多个正解, 兰州大学硕士论文 (1988).
[244] 王向东,梁(汲金)延, 戎海武, 索伯列夫空间论, 科学出版社, 北京, 2003.
[245] 王幼宁, 刘继志, 微分几何讲义, 北京师范大学出版社, 北京, 2003.
[246] 吴大任, 微分几何讲义 (第 4 版), 高等教育出版社, 北京, 1981.
[247] 武卓群,引景学,王春朋, 椭圆与抛物型方程引论, 科学出版社,北京,2003.
[248] 熊金城, 点集拓扑讲义, 人民教育出版社,北京,1981.
[249] 许兰喜, 非线性分析, 化学工业出版社, 北京, 2003.
[250] 杨振明, 概率论, 科学出版社,北京,1999.
[251] 严加安, 测度论讲义, 科学出版社,北京,2000.
[252] 余庆余, 范先令, 微分形式与度数, 兰州大学出版社, 兰州, 1989.
[253] 俞允强, 广义相对论引论 (第二版), 北京大学物理学丛书, 北京大学出版社, 北京, 1997.
[254] 张恭庆, 临界点理论及其应用, 上海科技出版社, 上海, 1986.
[255] 张恭庆, 一个变化的 Mountain Pass 定理, 中国科学(A辑) 13 (1983),306–317.
[256] 张恭庆, 林源渠, 泛函分析讲义 (上), 北京大学出版社, 北京, 1987.
[257] 张恭庆, 郭懋正, 泛函分析讲义 (下), 北京大学出版社, 北京, 1990.
[258] 钟承奎, 范先令, 陈文(山原), 非线性泛函分析引论, 兰州大学出版社, 兰州, 1998.
[259] 钟玉泉, 复变函数论, 高等教育出版社, 北京, 1979.

索 引

[General Information]
书名=变分法与临界非线性
作者=王文智著
页数=353
SS号=12625113
DX号=
出版日期=2010.07
出版社=厦门大学出版社